

Done
#

Copy of

Copy of



ترسیلات

برائے

میٹری کیونشن

100-11

100-11



تصانیف علامہ محمد عارف صاحب

ترسیات

مساوات درجہ دوم کا جبرہ اور رسمی حل
عثمانیہ میٹرک بولیشن کی جماعتوں کے لیے

تالیف

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے (ریٹائر)

پروفیسر ریاضیات کلیہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

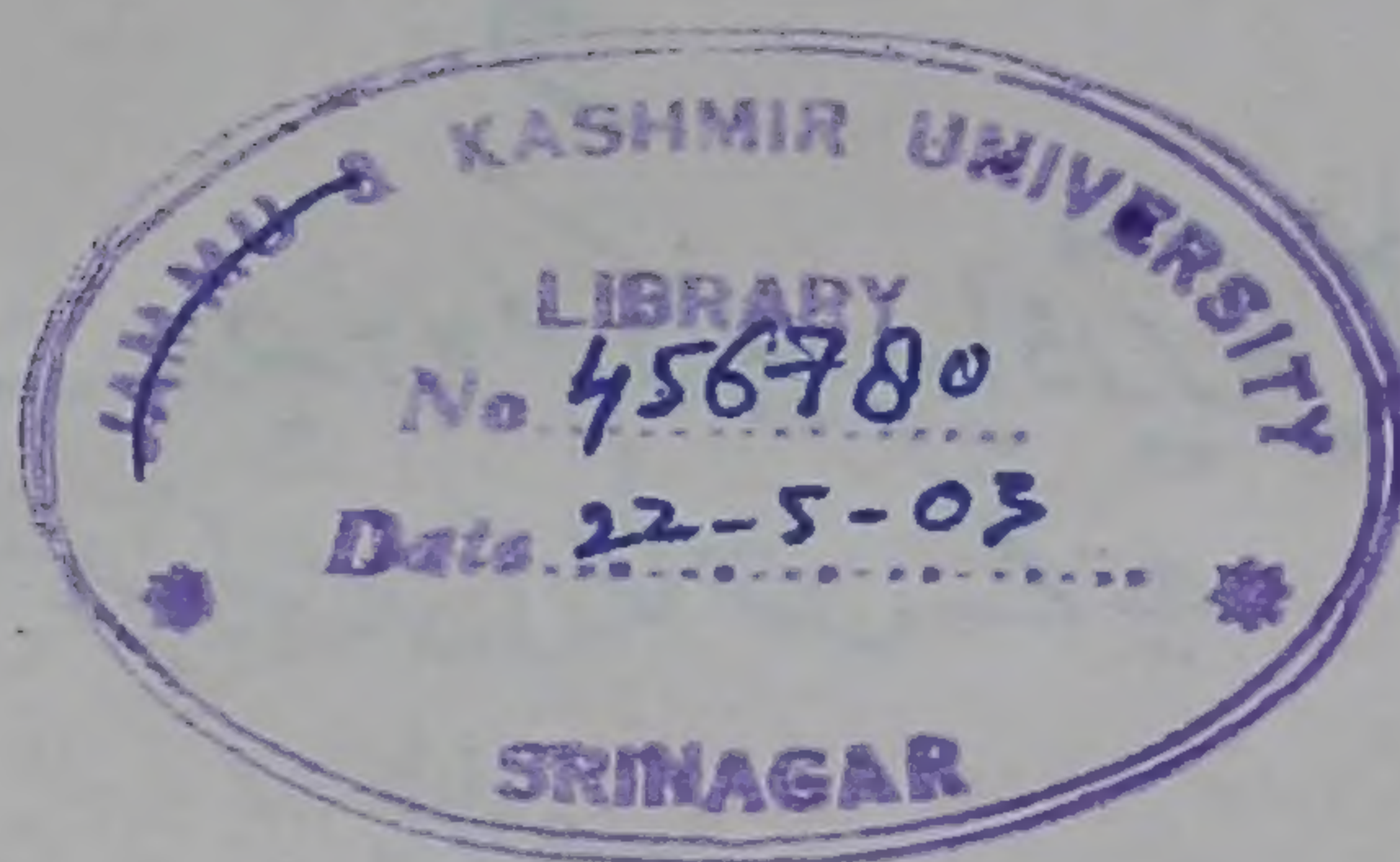
۱۳۵۱ھ ۱۳۲۲ھ ۱۹۳۳ھ

(طبع ثانی)

طبع خانہ عثمانیہ سرکار عالی



510
u 885



دیسباچہ

حسب ہدایت ذیلی کٹی ریاضیات یہ چھوٹی سی کتاب ”ترسیات اور مساوات درجہ دوم نظری اور ترسیمی حل پر“ عثمانیہ میٹریوٹیشن کی جماعتوں کے لئے منظور و نصاب کے مطابق لکھی گئی ہے۔ نصاب مذکور کی حدود کے اندر جس قدر ممکن تھا کتاب کو ترتیب اور مضمون کے لحاظ سے مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے اور اس امر کو ہمیشہ ملحوظ رکھا گیا ہے کہ مطالب کو صاف، سادہ اور آسان عبارت میں پیش کیا جائے۔ ہر موقع پر مضمون کی توضیح کے لئے حل کردہ اور مشقی مثالوں کی کافی تعداد موجود ہے، تاہم طالب علم کو چاہیے کہ ہر قسم کے اعداد و شمار کو جن میں وہ خاص دلچسپی رکھتا ہو ترسیمی طریق پر تعبیر کرنے کی کوشش کرے اور اس طرح مناسب طبع زاد مثالوں کا ذخیرہ اپنے لئے خود پیدا کر لے۔ مثلاً کرکٹ یا دوسرے کھیلوں میں اپنی دوڑوں اور بازیوں کے گراف بنانے سے، اپنے امتحانوں کے حاصل کردہ نشانات کو مرتب کرنے سے، محل میں اپنے تجربات کے مقدمات کی بنیاد پر ترسیمیں بنانے اور پیش پیمائش اور بار پیمائش کے چڑھنے اترنے کو مرتب کرنے سے کئی دلچسپ مثالیں مرتب ہو سکتی ہیں۔ روزانہ اردو

اور انگریزی اخباروں میں کئی ایسے اعداد و شمار ملتے ہیں جن کی بنا پر ترسیمیں بنانا دیکھنی سے خالی نہیں ہوتا۔ اس کے علاوہ بہت سی کتابیں ہیں مثلاً وٹیکرز انٹرنیٹ اسٹٹس مینیریٹک، بستان آصفیہ وغیرہ وغیرہ جن میں ایسے اعداد و شمار کا ذخیرہ موجود ہے جو ترسیمی طریقوں کے لئے ہنایت موزوں ہیں۔

ترسیمات ہندسہ تجلی کی اور اس لحاظ سے ریاضی جدید کی ابتدا ہیں، دو متغیروں کے باہمی انحصار کو یعنی تفاعل کے مفہوم کو واضح طور پر ایک شکل میں بتدی کو دکھانے کے لئے ترسیم خاص اہمیت رکھتی ہے، اس کی ضرورت ہر جگہ مسئلہ ہے اور اس کا احاطہ استعمال ابتدائی اور اعلیٰ ریاضی، سائنس اور انجینئرنگ میں نہیں بلکہ اور غیر متعلقہ مضامین معاشیات، سیاسیات وغیرہ وغیرہ میں روزانہ بڑھتے جا رہے۔ آئے دن اپنے کاروبار میں تاجر لوگ اسے بلا تکلف ان چیزوں کے متعلق جو ان کے کسی گودام میں موجود نہیں ہوتیں ایسی ایسی لمبی فہرستیں مرتب کرنے میں استعمال کرتے ہیں جن میں ہر ایک شے اور اس کے ہر ایک ناپ اور پیمانہ کی قیمت بڑی صحت سے مندرج ہوتی ہے، ہسپتالوں کے ہر کمرہ میں "گراف پیر" ہر مریض کے سر صافانے موجود ہیں، جن میں اس کی مہنتوں اور مہینوں کا ٹھیکہ ترسیم کو فقط ایک نظر دیکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ عثمانیہ میٹریکیولیشن کے طالب علم اس چھوٹی سی کتاب کے مطالعہ سے فائدہ اٹھائیں گے اور کالج کی جماعتوں میں آنے سے قبل ترسیمات کے چند سادہ اصولوں سے واقف ہوں گے۔

قاضی محمد حسین

۱۴ مارچ ۱۳۳۱ء

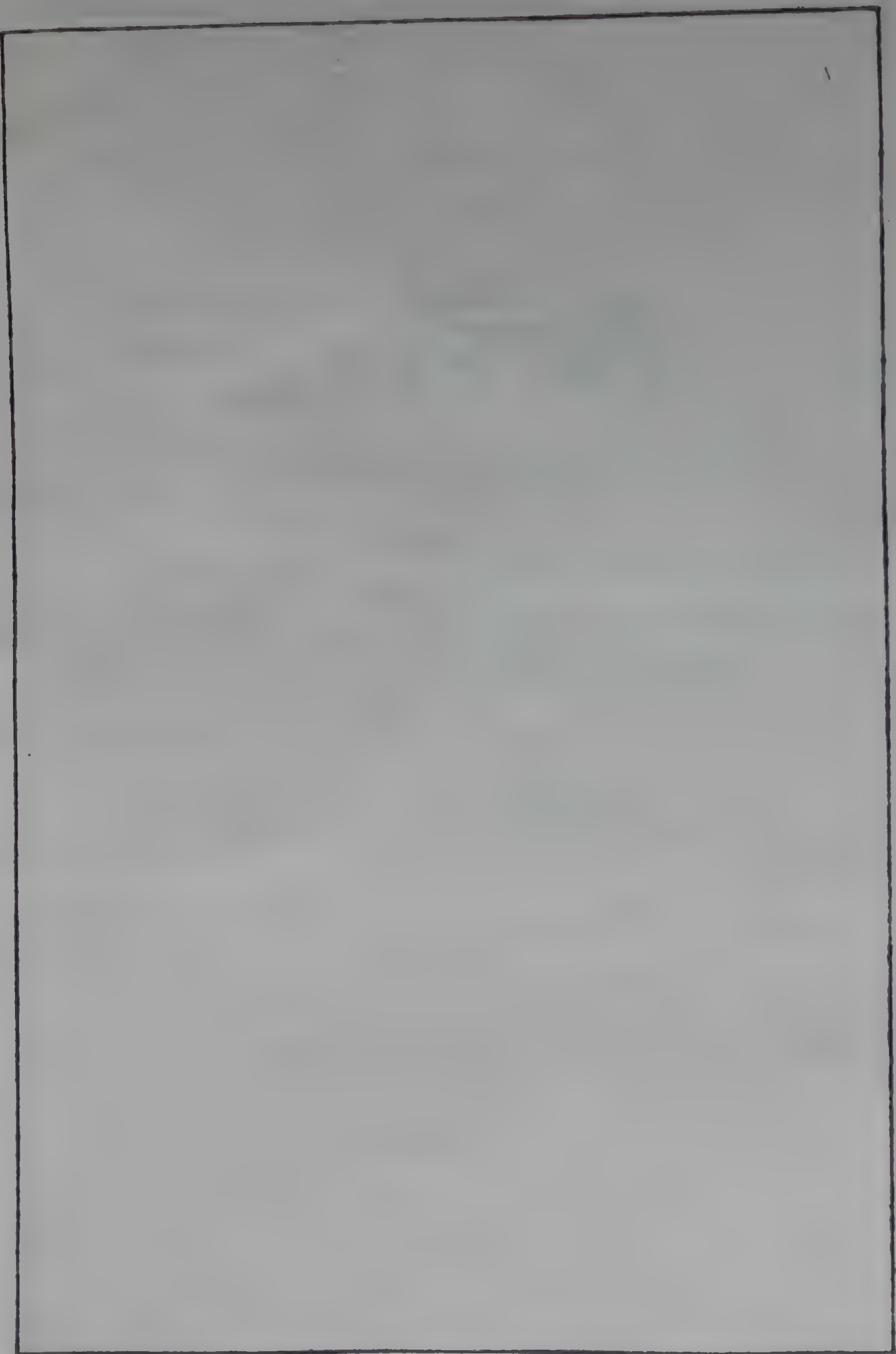
دوسرا ایڈیشن دوم

(۰۰۰)

اس کتاب کے دوسرے ایڈیشن میں، شروع سے آخر تک مضامین اور سوالات کی نظر ثانی کی گئی ہے۔ بعض جگہ متن میں خفیف سی ترمیمات بھی کی گئی ہیں مگر بالعموم مضامین اور ترتیب کتاب وہی ہے جو پہلے ایڈیشن میں تھی۔

قاضی محمد حسین

انہ خور داد ۱۳۴۱ھ



فہرستِ مضمون

صفحہ	مضمون	نمبر شمار
	باب اول	
۱	مثبت اور منفی فاصلے۔	۱
۷	ایک خط پر کسی نقطہ کا تعین	۳
۱۲	سطح مستوی پر کے نقاط کی تعیین	۶
۳۲	باب دوم	
	خطی مساوات کی ترسیم	۱۰
۶۲	خطی ہمزاو مساواتوں کا ترکیبی حل	۱۸
۸۱	باب سوم	
	خطی کلیہ	۲۳
۱۰۹	عام ترسیمیں	۲۷
۱۳۳	باب چہارم	
	مساوات درجہ دوم	۳۱
۱۶۳	مساوات درجہ دوم کا ترکیبی حل	۴۲
	جوابات	

ترسیات

۱۔ مثبت اور منفی فاصلے۔ اس شکل میں ایک افقی مستقیم خط ہے جو دونوں طرف غیر محدود ہے۔



ایک نقطہ اس پر حرکت کرتا ہے اور ا سے چل کر ب پر پہنچتا ہے۔ علاوہ اور چیزوں کے اس نقطہ کے متعلق دو باتوں کا معلوم ہونا ضروری ہے، ایک یہ کہ اس نے کتنا فاصلہ طے کیا، دوسرے کس سمت میں کیا۔ اگر ا اور ب کا درمیانی فاصلہ ۴ میل ہو جو ایک میل فی سنتی میٹر کے حساب سے شکل میں دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں نقطہ مذکور نے "۴ میل کا فاصلہ دائیں جانب" طے کیا ہے۔

اب فرض کرو کہ یہ نقطہ ب سے چل کر واپس ا پر پہنچتا ہے، اس صورت میں اس نے "۴ میل کا فاصلہ بائیں جانب" طے کیا۔

دونوں صورتوں میں مطلق فاصلہ طے شدہ وہی ہے۔ یعنی ۴ میل، صرف فرق یہ ہے کہ اگر ایک فاصلہ ایک سمت میں طے ہوا ہے تو دوسرا اس کی متقابل سمت میں طے ہوا ہے۔

پس اگر ہم فاصلوں کو عددوں سے تعبیر کر کے اپنے احاطہ تحقیقات میں لانا چاہتے ہیں تو ہمیں فاصلہ کی سمت کو تعبیر کرنے کی کوئی تدبیر اختیار کرنی چاہیئے۔

علم حساب میں عدد مطلق سے بحث تھی، جبر و مقابلہ میں منفی عددوں کے تخیل کو زیادہ کرنا پڑا اور مثبت اور منفی اعداد کی تشریح کے لئے عام فہم مثالیں سوچنا پڑیں، مثلاً ہم اس سے واقف ہیں کہ لین دین، نفع نقصان، درآمد برآمد کی سی عام باتیں عددوں کے پہلے مثبت اور منفی علامتیں رکھنے سے تعبیر ہو سکتی ہیں، مثلاً تین روپیہ کا نفع + ۳ سے اور تین روپیہ کا نقصان - ۳ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

ان مثالوں سے ایک اصولی بات معلوم ہوتی ہے کہ اگر ایک عمل یہ صلاحیت رکھتا ہو کہ وہ عددوں سے تعبیر ہو سکے تو مثبت اور منفی علامتوں کے استعمال سے یہ عمل اور اس کا الٹ (یعنی متضاد) تعبیر ہو سکتے ہیں۔ اب چونکہ فاصلہ عددوں سے تعبیر ہو سکتا ہے، اس لئے اس کی سمت کو ظاہر کرنے کی ایک تدبیر یہ ہے کہ ہم علامات جبر یہ مثبت اور منفی سے کام لیں۔

پس اوپر کی شکل میں اگر اُس فاصلہ کو جو متحرک نقطہ ۱ سے ب تک جانے میں طے کرتا ہے + ۴ سے تعبیر کیا جائے تو ب سے ۱ تک کے فاصلہ کو - ۴ سے تعبیر کیا جائے گا، یہ بالکل اختیاری امر ہے کہ ہم کس سمت کے طے کردہ فاصلوں کو مثبت قرار دیں مگر آئندہ ہمیشہ کے لئے ہم مان لیتے ہیں کہ دائیں سمت کے طے کردہ فاصلے مثبت اور بائیں سمت کے فاصلے منفی خیال کئے جائیں گے۔

مثلاً اگر شکل میں ب اور ج کا درمیانی فاصلہ ۶ میل ہو تو ب سے ج تک جانے میں متحرک نقطہ - ۶ میل فاصلہ طے کرے گا اور ج سے ۱ تک جانے میں + ۲ میل۔

اگر یہی نقطہ ۱ سے ب تک اور پھر ب سے ج تک جائے تو یہ + ۴ - ۲ = ۲ میل فاصلہ طے کرے گا، دراصل اس کی مسافت تو ۱۰ میل ہے لیکن اگر سمت کو ملحوظ رکھا جائے تو ایسا خیال کیا جائیگا کہ اس نے صرف - ۲ میل فاصلہ طے کیا ہے یعنی کل مسافت کے بعد یہ

اپنے آپ کو نقطہ ابتدائی ۱ کے دو میل بائیں جانب پاتا ہے۔ اسی طرح کوئی نقطہ ۵، افقی خط پر ایسا ہے کہ ب اور ۵ کا درمیانی فاصلہ ۹ میل ہے، اگر ایک شخص نقطہ ابتدائی ب سے ۱ تک ۱ سے ۵ تک اور ۵ سے ج تک جائے تو وہ فاصلہ $۲ - ۵ + ۳ = ۶$ میل طے کرے گا یعنی اس مسافت کے بعد وہ اپنے آپ کو مقام ب سے جہاں سے وہ چلا تھا ۶ میل بائیں جانب پائے گا۔ پس اس طرح سے ایک متحرک شے کا وہ فاصلہ جو اس نے فی الحقیقت طے کیا ہے حاصل نہیں ہوتا بلکہ وہ فاصلہ حاصل ہوتا ہے جو دائیں بائیں پھرنے پھرانے کے بعد اس کے آخری مقام اور ابتدائی مقام کے درمیان ہے۔

اسی طرح اگر انتصابی یا کھڑے خط پر فاصلے ناپنے کی ضرورت ہو تو ایک سمت کو مثبت خیال کرنا پڑیگا اور متقابل سمت کو منفی۔

اس صورت میں بھی ہم مان لیتے ہیں کہ اوپر کی طرف (راستی سمت میں ۱) جو فاصلے ناپے جائیں گے وہ مثبت ہونگے اور جو نیچے کی طرف (شاؤولی سمت میں ۱) ناپے جائیں گے وہ منفی ہونگے۔

مثلاً ۱ سے ب تک جانے میں جو فاصلہ طے ہوگا اس کو $۴ +$ سے اور ب سے ۱ تک کے فاصلہ کو $۴ -$ سے تعبیر کیا جائے گا۔ اسی طرح ب سے ج تک جانے کا فاصلہ $۶ -$ ہے اور ج سے ۱ تک کا فاصلہ $۲ +$ ہے وغیرہ وغیرہ۔

۴۔ ایسا جملہ بار بار استعمال ہوتا ہے ”وہ فاصلہ جو ایک متحرک شے ۱ سے ب تک جانے میں طے کرتی ہے“

اس جملہ کی بجائے اختصار کی خاطر ہم ”ب“ لکھتے ہیں جہاں نقطہ ابتدائی ۱ پہلے لکھا گیا ہے اور نقطہ آخری ب بعد میں۔ اس طرح ج ۵ سے

وہ فاصلہ مراد ہوگا جو ایک شخص یا کوئی متحرک شے ج سے د تک جانے میں طے کرتی ہے، پس ا ب ایک مثبت عدد کے مساوی ہوگا اگر ب کے دائیں جانب ہو اور منفی ہوگا اگر ب، ا کے بائیں جانب ہو، مثلاً

خط (۱) سے ا ب = ۳ + ۳

(۱)

اور خط (۲) سے ا ب = ۳ - ۳

(۲)

معلوم ہوا کہ ا ب جبریہ مقداروں کی طرح مثبت اور منفی ہو سکتا ہے اور دراصل یہ ہے بھی "فاصلہ مع سمت"۔ اس کو ہم سمتی حصہ یا صرف سمتی کہیں گے۔ اگر ایک خط پر کسی ترتیب سے دو نقطے ا اور ب لئے جائیں مثلاً اوپر کے خط (۲) میں تو اس سے

$$ا ب = ۳ - ۳$$

اور اسی خط سے ب ا = ۳ + ۳، پس اگر ہم ا ب کو مقادیر ریاضی میں شریک کر لیں تو لازماً

$$ا ب + ب ا = ۳ + ۳ = ۰$$

یعنی ا ب + ب ا = ۰ " " " " (۱)

خواہ ب، ا کے کسی جانب واقع ہو۔

اس مساوات کا مطلب یہ ہے کہ اگر ایک متحرک شے ا سے ب تک جائے اور پھر ب سے ا پر واپس آجائے تو نقطہ ابتدائی سے اس کا فاصلہ طے کردہ صفر ہوگا۔

اسی طرح اگر تین نقطے ا، ب، ج ایک خط پر کسی ترتیب سے لئے جائیں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ان نقاط کے سب مقامات کے لئے

$$ا ب + ب ج + ج ا = ۰$$

ا ب + ب ج + ج ا = ۰ " " " " (۲)

یعنی اگر ایک متحرک شے ا سے ب تک، پھر ب سے ج تک جائے

تو اس مسافت کے بعد وہ نقطہ ابتدائی سے بلحاظ سمت اور مقدار کے اتنے ہی فاصلہ پر ہوگی گویا کہ وہ سیدھی ا سے ج تک گئی۔ مختلف صورتوں میں فاصلے ناپنے سے طالب علم خود اس کی تصدیق کرے۔
اب ظاہر ہے کہ دو یا زیادہ سمتی حصے ا ب، ا ب، ا ب باہم ہر طرح سے مساوی ہونگے اگر

(۱) وہ مقدار میں مساوی ہوں

اور (۲) ان کی سمتیں ایک ہی ہوں

اور (۳) وہ ایک ہی خط پر یا متوازی خطوط پر ناپے گئے ہوں۔

مثلاً شکل ۱۰ میں

ا ب، ا ب، ا ب

وغیرہ سب = ۳

سے تعبیر ہونگے۔

اب ہم یہ قید لگاتے ہیں کہ سب فاصلے ایک ہی خط پر اور ایک ہی نقطہ سے ناپے جائیں یعنی ہر صورت میں مقام ابتدائی و ایک ہی ہو، اس لئے ۳ کے مقابل ایک اور صرف ایک ہی سمتی و ا ہوگا جہاں نقطہ ا ایک مقررہ مستقیم خط پر و کے بائیں جانب ۳ اکائیوں کے فاصلہ پر ہے۔



اسی طرح کسی اور عدد - ۳، ۵، ۲، ۴ وغیرہ کے مقابل صرف ایک سمتی ہوگا دیکھو شکل بالا
اس سے قبل ایک ہی عدد سے بیشتر سمتی یا فاصلے تعبیر ہو سکتے تھے، صرف نقطہ ابتدائی کو ثابت کر دینے سے ہر عدد کے مقابل ایک فاصلہ اور ہر فاصلے کے مقابل

و ا = ۳
و ا = ۴
و ا = ۲
و ا = ۳

۳۳ ایک خط پر کسی نقطہ کا تعین

Handwritten symbols on a grid background, possibly representing a sequence or code. The symbols are arranged in a single row and include various characters, some resembling letters and others resembling mathematical or scientific notation.

دریافت کرنا مطلوب ہے۔
عام طور پر کسی مقام کی یقین اُس صورت میں ممکن ہے جبکہ اس کے
قریب کوئی ایسی جگہ واقع ہو جس کے مقام اور محل سے ہم بخوبی واقف
ہوں اور بلحاظ جس کے مقام مذکور کی یقین ہو سکتی ہو۔

ہوں اور بلحاظ جس کے مقام مذکور کی تعیین ہو سکتی ہو۔
اس لئے اس کا مقام معلوم کرنے کے لئے ہم کوئی نقطہ و مستقیم
خط پر مقرر کرتے ہیں اور اس نقطہ کے لحاظ سے اس خط پر کے تمام
نقطوں کے مقام معلوم کرتے ہیں، پس و ہمارا ابتدائی نقطہ ہے، آئندہ
ہمارے سب فالے اس ثابت نقطہ سے ناپے جائیں گے۔ اس نقطہ کو ہم
مبدأ کہیں گے۔

مبدأ نہیں ہے۔
 ظاہر ہے کہ نقطہ ۱ (یا کسی اور نقطہ) کے مقام کا تعین ہو سکے گا اگر
 اس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ و سے معلوم ہو اور یہ بھی معلوم ہو کہ نقطہ ۱ و
 کے کس جانب واقع ہے۔ اب اوپر کی شکل میں ۱ و سے ۵ اکائیاں
 دائیں جانب واقع ہے اس لئے حسب دفعہ فاصلہ ۱ و ۵ سے تعبیر
 ہوگا، نیز چونکہ سب فاصلے ایک ثابت نقطہ و سے ناپے جا رہے ہیں
 اس لئے ۵ سے اور کوئی فاصلہ یا سمتی سوائے ۱ کے تعبیر نہیں ہو سکتا
 اور فاصلہ ۱ و ۵ سے (یعنی و سے ۵ اکائیاں دائیں جانب جانے

سے) ہم ایک اور صورت ایک ہی نقطہ Δ پر پہنچتے ہیں، اس لحاظ سے ہم $+5$ کو نقطہ Δ کا محدود کہتے ہیں۔ اسی طرح اگر ہم 0 سے 5 اکائیاں بائیں جانب جائیں تو ہم صرف ایک نقطہ Δ پر پہنچتے ہیں، اس لحاظ سے -5 نقطہ Δ کا محدود ہے۔ ظاہر ہے کہ ہمیں اس طرح ایک ہندسی نقطہ کو عددوں کے ذریعہ نامزد کرنے کی ایک نئی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً $+5$	محدود ہے	نقطہ	ب کا
-5	"	"	ب کا
$+11$	"	"	ج کا
-11	"	"	ج کا
صفر	"	"	و کا
اور 5	کا	محدود	$+555$ ہے
5	"	"	-555 ہے
ب	"	"	$+5$ ہے
ب	"	"	-5 ہے
و	"	"	صفر ہے

پس ہر عدد (مثبت، منفی، کمزور) کے جواب میں خط Δ پر ایک نقطہ ہے اور ہر نقطہ کے ساتھ اس طرح سے ایک اور صورت ایک عدد منسلک ہے جس کو ہم نے اس نقطہ کا محدود کہا ہے۔

طالب علم جانتا ہے کہ تمام حقیقی اعداد سلسلہ ذیل میں شامل ہیں

..... $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$ (۱)

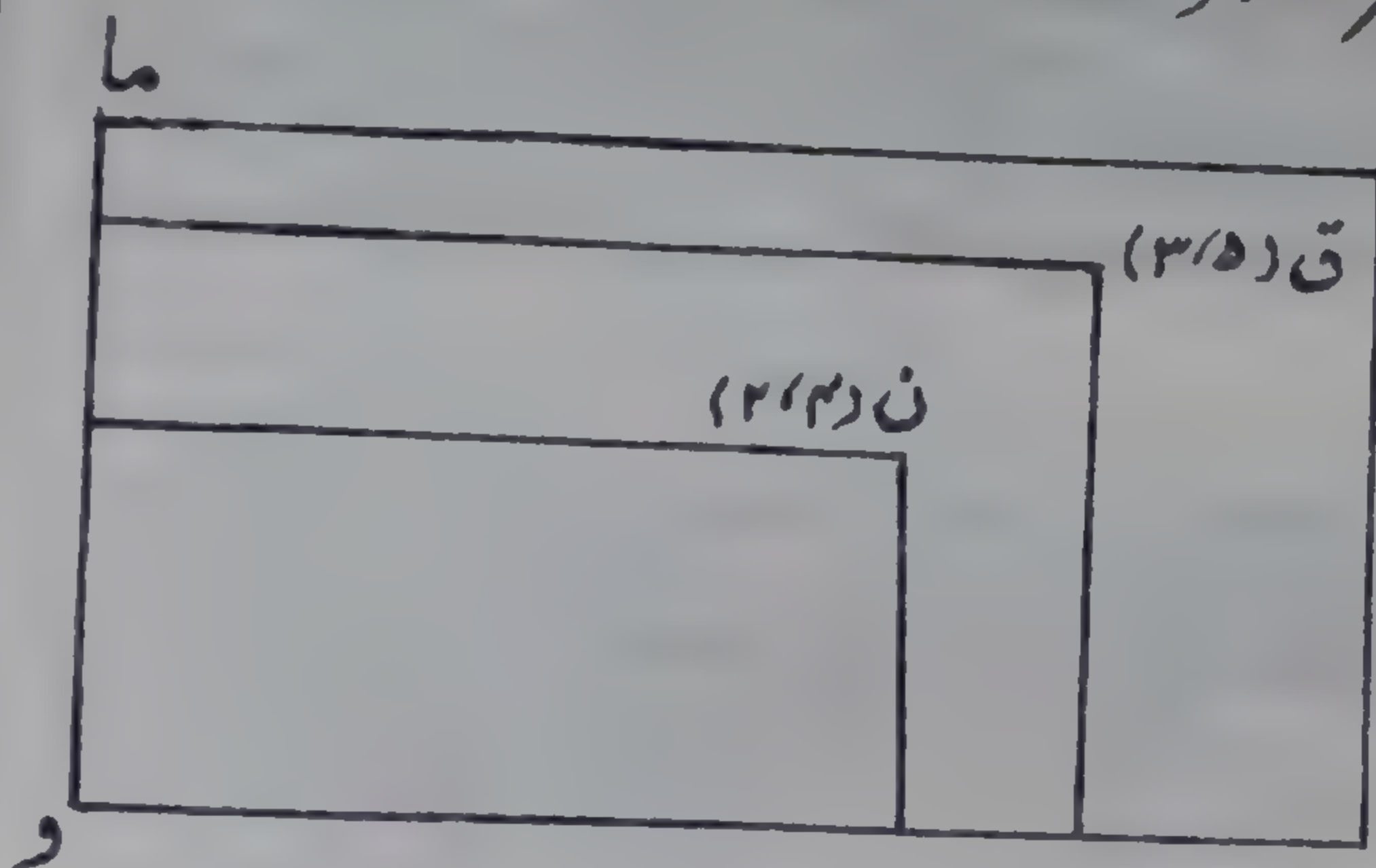
اس سلسلہ میں علاوہ صحیح عددوں کے کسریں بھی موجود ہیں اگرچہ

لکھی نہیں گئیں مثلاً 1 اور 2 کے درمیان $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ وغیرہ سب

موجود ہیں۔ اب اس سلسلہ اعداد کے ہر ایک عدد یا کسر کے جواب میں خط

مستقیم پر ایک اور صورت ایک نقطہ حاصل ہوتا ہے ملاحظہ ہو شکل صفحہ ۹

چوتھی اور نیچے سے تیسری ہے، یعنی ۱ کی نشست کا تعین دو پیمائشوں سے ہو گا ایک تو اس کے فصل محور و ما سے جو ۴ ہے دوسرے اس کے فصل محور و لا سے جو ۴ ہے، پس اگر نشست کے لئے ہم پیمائش کی یہی ترتیب مقرر کر لیں یعنی پہلے و ما سے پھر و لا سے، تو دو اعداد (۳، ۴) سے ۱ کی نشست کا تعین ہو سکتا ہے، اسی طرح سے اعداد (۴، ۵) نشست ۲ کا تعین کرتے ہیں۔ وغیرہ وغیرہ



اب فرض کرو کہ

ولا ۱ ما ایک مستطیل

شکل کی میز ہے، اور اس پر

کوئی نقطہ ن ہے جس کا

مقام ہم عددوں کے ذریعہ

متعین کرنا چاہتے ہیں،

ظاہر ہے کہ اگر میز کے دو

متصل کناروں سے ن

کے فاصلے ناپے جائیں تو ان فاصلوں کے ذریعہ ہم اس نقطہ کا تعین کر سکتے

ہیں۔ فرض کرو کہ یہ کنارے ولا اور و ما ہیں۔ اب اگر ایک سنتی میٹر ایک

فٹ کو تعبیر کرے تو ن کا فاصلہ و ما سے ۴ فٹ ہے اور ولا سے ۲ فٹ

پس اگر ہر نقطہ کے یہ فاصلے اسی ترتیب سے ناپے جائیں یعنی پہلے

و ما سے اور پھر ولا سے تو اعداد (۲، ۴) نقطہ ن کے مقام کی پورے

طور پر تعین کرتے ہیں۔ یہ اس طرح سے بھی ظاہر ہے کہ اگر ہم و سے

شروع ہو کر ولا پر ۴ فٹ جائیں، پھر دو فٹ و ما کے متوازی چلیں

تو ہم میز کے ایک اور صرف ایک ہی نقطہ ن پر پہنچتے ہیں، پس ن

کے مقام کا تعین (۲، ۴) سے ہو سکتا ہے۔

اسی طرح سے ق کے مقام کا تعین (۳، ۵) سے ہو سکتا ہے

کیونکہ ق کا فاصلہ و ما سے ۵ فٹ ہے اور ولا سے ۳ فٹ، یا اگر ہم

و سے شروع ہو کر ولا پر ۵ فٹ پھر و ما کے متوازی ۳ فٹ جائیں تو ہم صرف نقطہ قی پر پہنچتے ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ ایک سطح مستوی پر کسی نقطہ کا مقام مقرر کرنے کے لئے دو پیمائشوں کی ضرورت ہوتی ہے یعنی سطح پر کا کوئی نقطہ دو عددوں سے تعبیر ہوگا۔

میز کی صورت میں سطح مستوی محدود ہے، لیکن ہمارے خطوط مستقیم (دفعات ۳ اور ۴) کی طرح یہ سطح بھی ہر سمت میں غیر محدود ہو سکتی ہے اور اس پر کے ہر نقطہ کا تعین دو پیمائشوں یا دو عددوں کے ذریعہ ہو سکتا ہے بشرطیکہ ہم فاصلوں کی سمتوں کو ملحوظ رکھیں۔

۴۔ سطح مستوی پر کے نقاط کی تعین۔ فرض کرو کہ ایک سطح مستوی چاروں طرف غیر محدود ہے اور اس پر کے تمام نقطوں کا تعین ہم عددوں کے ذریعہ کرنا چاہتے ہیں۔

اس سطح پر ایک نقطہ A لو جس کی تعین منظور ہے۔

سب سے پہلے ہم اس سطح مستوی پر کوئی نقطہ ابتدائی و مقرر کرتے ہیں جس سے ہمارے سب فاصلے ناپے جائیں گے، اس نقطہ کو ہم مبدا کہیں گے۔

نیز فاصلوں کی سمتوں کو مقرر کرنے کے لئے مبدا میں سے گزرتے ہوئے دو غیر محدود مستقیم خط AO و AO' اور ماد ما کھینچو جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہوں دیکھو شکل صفحہ ۱۳۔

ان فاصلوں کی سمتوں کو تعبیر کرنے کے لئے ہم ان حسابی دستوروں کو ملحوظ رکھیں گے جو ہم پہلے مقرر کر چکے ہیں یعنی

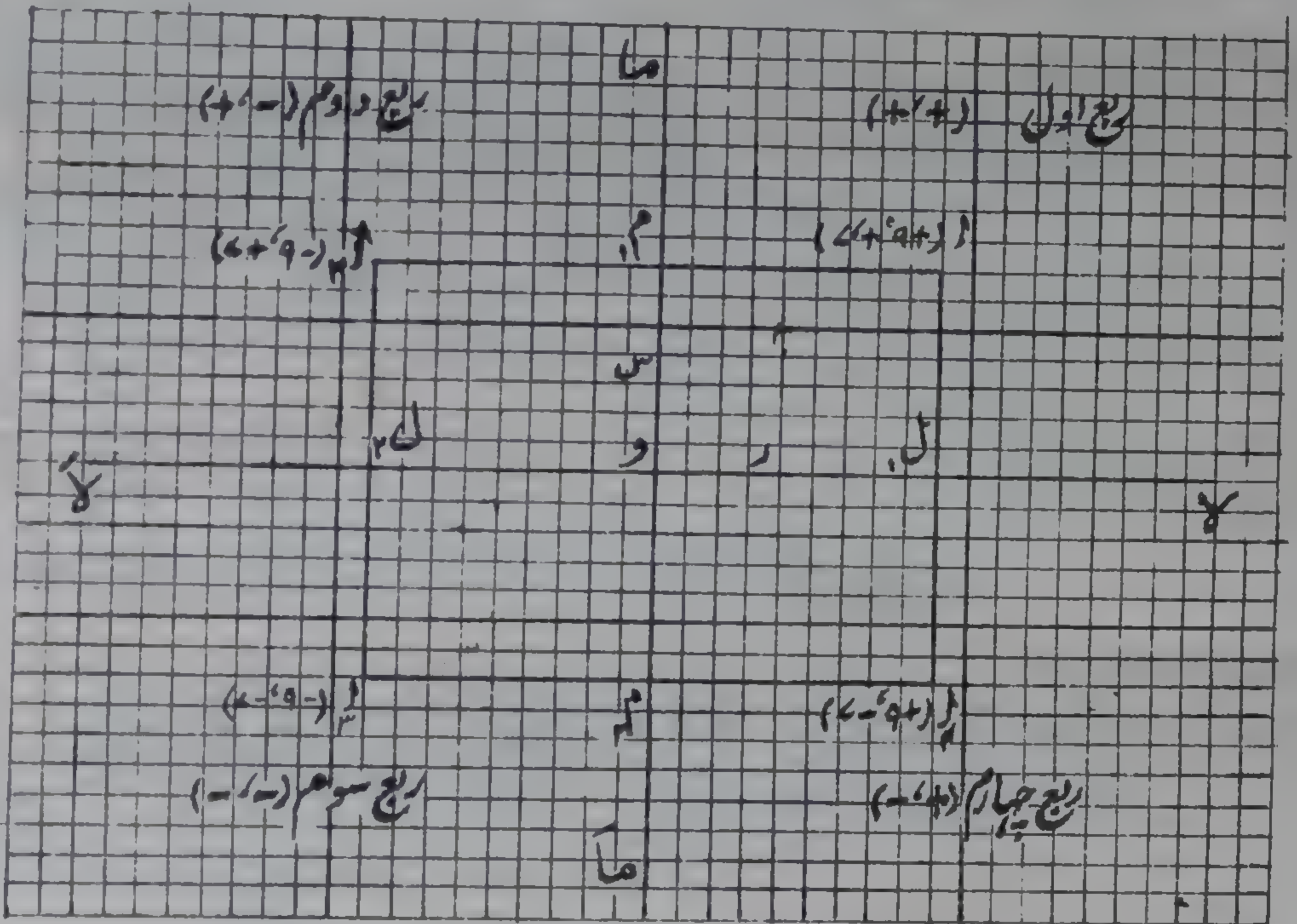
(۱) جو فاصلے AO و AO' پر یا اس کے متوازی دائیں جانب و AO

کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ مثبت عددوں سے تعبیر ہونگے اور جو

بائیں جانب و AO کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی عددوں سے تعبیر ہونگے۔

(۲) اور اسی طرح جو فاصلے دوسرے خط مادما پر یا اس کے کسی متوازی خط پر اوپر کی جانب، و ما کی سمت میں تاپے جائیں گے وہ مثبت ہونگے اور جو نیچے کی طرف یعنی و ما کی سمت میں تاپے جائیں گے وہ منفی ہونگے۔

خطوط لا ولا اور مادما کو حوالہ کے محور یا اختصاراً صرف محور کہتے ہیں، بعض اوقات لا ولا کو محور لا اور مادما کو محور ما بھی کہتے ہیں۔ ان پر مثبت یا منفی علامتیں لکھ دی گئی ہیں جو ان کی سمتوں کو تعبیر کرتی ہیں۔



نقطہ ۱ سے ان محوروں پر عمود ال، ام نکالو۔
اب د سے ۱ تک پہنچنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم فاصلہ ول،
دائیں جانب محور لا پر چلیں اور پھر فاصلہ ل، ۱ (یعنی فاصلہ و م) محور
ما کے متوازی اوپر کی طرف طے کریں، یہ فاصلے (ول، ل، ۱) اس
نقطہ کے ساتھ خاص طور پر منسوب ہیں، ان کو طے کرنے سے ہم سطح

کے ایک اور صرف ایک نقطہ Δ پر پہنچ سکتے ہیں۔ اس لحاظ سے ان فاصلوں یعنی Δ کو نقطہ Δ کے محدود کہتے ہیں، ان کی اہمیت کی وجہ سے ان فاصلوں کو الگ الگ نام دئے گئے ہیں، فاصلہ Δ کو جو محور Δ پر یا اس کے کسی متوازی پر طے کیا گیا ہے نقطہ Δ کا فصلیہ کہتے ہیں اور Δ کو جو محور Δ کے متوازی طے کیا گیا ہے نقطہ Δ کا معین کہتے ہیں طالب علم ان ناموں سے مرعوب نہ ہو جائے یہ محض اس نقطہ کے فاصلے ہیں دو خطوں سے۔

پس نقطہ Δ کے محدود Δ اور Δ ہیں، لیکن بیشتر اس کے کہ ہم ان فاصلوں کی پیمائش کر سکیں ہیں فاصلہ نامنے کی ایک اکائی مقرر کر لینی چاہیے، لیکن یہ ضروری نہیں کہ محور Δ اور محور Δ پر کے فاصلوں کی اکائیاں مساوی ہوں، ہم محور Δ اور اس کے متوازی فاصلوں کے لئے اکائی Δ اور محور Δ اور اس کے متوازی فاصلوں کے لئے اکائی Δ فرض کر سکتے ہیں، مگر فی الحال سہولت کے لئے ہم یہ مان لیں گے کہ یہ اکائیاں دونوں محوروں کے لئے مساوی ہیں اور مربع دار کاغذ کے چھوٹے خانہ کا طول دونوں

محوروں پر ایک اکائی کو تعبیر کرتا ہے یعنی $\frac{1}{10}$ اینچ $(\frac{1}{10}) = 1$

پس اس اکائی کے موافق فاصلہ Δ $9 + \Delta$ اور Δ $4 + \Delta$ ، اس لئے نقطہ Δ کے محدود $(9 + \Delta + 4 + \Delta)$ ہوئے، پس ایک ہندسی نقطہ Δ کا نام عددوں میں $(9 + \Delta + 4 + \Delta)$ رکھا گیا۔

یاد رہے کہ اس عددی تعبیر میں ہم نے محور Δ کے متوازی فاصلہ (فصلہ) کو پہلے لکھا ہے اور محور Δ کے متوازی فاصلہ (معین) کو بعد میں۔ آئندہ سب نقطوں کے لئے یہی طریق کتابت قائم رکھا جائے گا۔

حوالہ کے محور مستوی سطح کو چار حصوں یا ربعوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ سطح کے اُس حصہ کو جو Δ اور Δ سے گھرا ہوا ہے ربع اول کہتے ہیں۔ اور جو Δ اور Δ سے گھرا ہوا ہے اس کو ربع دوم کہتے

ہیں، اسی طرح سے جو ولا اور و ما کے درمیان ہے اس کو ربع سوم اور جو و ما اور ولا کے درمیان ہے اس کو ربع چہارم کہتے ہیں۔ ہم نے نقطہ ۱ کو ربع اول میں لیا اور دیکھا کہ اس کے دونوں محدود $(+1, +2)$ مثبت عدد ہیں، نیز ظاہر ہے کہ ربع اول میں ہر نقطہ کے محدود دو مثبت عدد ہونگے کیونکہ اس ربع کے کسی نقطہ تک پہنچنے کے لئے ہمیں محور لا پر دائیں جانب اور پھر سیدھا اوپر کی طرف جانا پڑتا ہے اور یہ محوروں کی مثبت سمتیں ہیں۔

اب ہم باقی تین ربعوں میں ایک ایک نقطہ لینے سے دیکھتے ہیں کہ ان ربعات کے متعلقہ محدودوں کی علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔ مناسب ہوگا کہ بلحاظ محوروں کے نقطہ ۱ کے عکس لینے سے جو مستطیل بنے اس راسوں کے محدود معلوم کئے جائیں ان سے علامات مذکورہ کا پتہ چلے گا۔

یہ مستطیل ہندسی طریق پر اس طرح بنے گا، ۱، ۱ اور ۱، ۱ محوروں پر عمود ہیں، ۱، ۱ کو ایک اتنا خارج کرو کہ ۱، ۱ = ۱، ۱ اور ۱، ۱ کو ۱، ۱ تک اتنا خارج کرو کہ ۱، ۱ = ۱، ۱۔ اب اس متوازی الاضلاع کی تکمیل کرو جس کے راس ۱، ۱، ۱، ۱ اور چوتھے راس کا نام ۱، ۱ رکھو۔ نیز فرض کرو کہ ۱، ۱ محور لا کو ۱، ۱ پر اور ۱، ۱ محور ما کو ۱، ۱ پر کاٹتے ہیں۔

اب ۱، ۱ سے ۱، ۱ تک پہنچنے میں فاصلہ ۱، ۱ بائیں جانب محور لا پر اور ۱، ۱ ۱، ۱ اوپر کی طرف محور ما کے متوازی جانا پڑتا ہے اور چونکہ $1, 1 = 1, 1$ اور $1, 1 = 1, 1$

اس لئے ۱، ۱ کے محدود $(-1, -2)$ ہیں۔ نیز ۱، ۱ سے ۱، ۱ تک پہنچنے کے لئے ۱، ۱ اکائیاں بائیں جانب اور ۱، ۱ اکائیاں نیچے کی طرف جانا پڑتا ہے۔ اس لئے ۱، ۱ کے محدود $(-1, -2)$ ہیں۔ اسی طرح ۱، ۱ سے ۱، ۱ تک پہنچنے کے لئے ۱، ۱ اکائیاں دائیں جانب اور ۱، ۱ اکائیاں نیچے کی طرف جانا پڑتا ہے اس لئے ۱، ۱ کے محدود

(۱۹+ - ۷) ہیں

یاد رہے کہ نقاط ۱، ۲، ۳، ۴ کے محدودوں کی عددی قیمتیں ایک ہی ہیں ۹ اور ۷، لیکن ان کے قبل مثبت اور منفی علامتیں مختلف ترتیبوں میں رکھنے سے ہمیں چار مختلف نقطے سطح پر حاصل ہوتے ہیں، اسی طرح عددوں کے کسی جوڑے سے ہمیں چار نقطے ملیں گے۔

اب ہم چاروں ربات کے محدودوں کی علامتوں کا فیصلہ کر سکتے ہیں ربع اول میں کے تمام نقطوں کے لئے دائیں جانب اور اوپر جانا پڑتا ہے اس لئے محدودوں کی علامتیں (+، +) ہیں۔

ربع دوم میں کے تمام نقطوں کے لئے بائیں جانب اور اوپر جانا پڑتا ہے اس لئے محدودوں کی علامتیں (-، +) ہیں

ربع سوم میں کے تمام نقطوں کے لئے بائیں جانب اور نیچے جانا پڑتا ہے اس لئے محدودوں کی علامتیں (-، -) ہیں

ربع چارم میں کے تمام نقطوں کے لئے دائیں جانب اور نیچے جانا پڑتا ہے اس لئے محدودوں کی علامتیں (+، -) ہیں

اب اگر سطح کے کسی نقطہ کے محدود دئے ہوئے ہوں تو ہم محض دیکھنے سے معلوم کر سکتے ہیں کہ یہ نقطہ کس ربع میں واقع ہے۔

اوپر کے سب نقطوں کے محدود عددی تھے اس لحاظ سے یہ خاص نقطے کہلاتے ہیں، اب فرض کرو کہ کوئی عام نقطہ N ہے اور اس پر پہنچنے کے لئے ہمیں فاصلہ لا محور کا پر اور فاصلہ لا محور صا کے متوازی جانا پڑتا ہے تو اس نقطہ N کے محدود (لا، لا) ہونگے۔

یاد رہے کہ لا، لا محض عدد ہیں، صرف اکھنوں نے جبر و مقابلہ کا حرفی لباس پہنا ہوا ہے، یہ عام سے عام نقطہ N کے محدود ہیں اور وہ اس لئے کہ اس نقطہ کے محدود (لا، لا) کو خاص عددی قیمتیں دیتے سے اس سطح پر کے تمام نقطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر (لا، لا) کی جگہ اعداد ذیل کے زوج (۰، ۰)، (۱۹+، ۷+)، (۷-، ۱۹-)، (۷-، ۷-)

(+، -)، (+، +)، (-، -)، (+، -)، (-، +) وغیرہ مندرج
کئے جائیں تو خاص نقاط و ا، ل، ر، ل، ل، م، ہم، وغیرہ
حاصل ہوتے ہیں۔

کہ استقامت کے لئے سب سے زیادہ ضروری ہے کہ ایک شخص اپنے آپ کو بڑھاتا رہے اور اپنی تعلیم میں مسلسل ترقی کرے تاکہ وہ دنیا کی تبدیلیوں کا سامنا کر سکے۔

حاصل ہوئے ہیں۔
یہ عام سے عام محدود (لا، ما) جبریہ حروف کو استعمال کرنے سے
حاصل ہوئے، گویا (لا، ما) ایک نقطہ کے محدودوں کی جبریہ صورت ہے۔

نوٹ۔ اس دفعہ میں ہم نے λ کے محدود λ ، λ ، λ مقرر کئے ہیں۔
ظاہر ہے کہ محوروں سے λ کے عمودی فاصلے $(\lambda, \lambda, \lambda)$ بھی اس کے
مقام کا تعین کر سکتے ہیں یعنی ہم $(\lambda, \lambda, \lambda)$ کو بھی نقطہ λ کے محدود کہہ سکتے
ہیں اور چونکہ λ بلحاظ سمت اور پیمائش کے λ کے مساوی ہے اس لئے
یہ دونوں محدود دونوں صورتوں میں ایک ہی ہیں، بعض اوقات ایک نقطہ کے
محدودوں کو عمودی فاصلے تصور کرنا مناسب ہوتا ہے، مثلاً

(۱) مبدأ کے محدود (۱۰۰) ہیں۔

(۲) محور لا پر کے سب نقطوں کا مسعین یعنی α محدود صفر ہے، مثلاً α

کے محدود (+، -) ہیں۔

(۳) محور ما پر کے سب نقطوں کا فاصلہ یعنی لا محدود صفر ہے، مثلاً م

کے محدود (۱۰ + ۷) ہیں

۷۔ دفعہ گزشتہ میں ہم نے ہندسی نقطوں کو عددوں کے ذریعہ نامزد کیا،
پس اگر سطح مستوی پر کوئی ہندسی نقطہ لیا جائے تو ہم اس کا عددی
نام یعنی اس کے محدود معلوم کر سکتے ہیں۔

نام یعنی اس کے محدود معلوم کر رہے ہیں۔
برعکس اس کے اگر ایک نقطہ کے محدود دئے جائیں تو اس کے
ہندسی مقام کا تعین ہو سکتا ہے، مثلاً فرض کرو کہ ایک نقطہ کے محدود (۳، ۸)
یا عام طور پر (لا، ما) معلوم ہیں اور سطح مستوی پر اس کا مقام مطلوب ہے،
صورت اول میں ہمیں مبداء سے بائیں جانب محور کلا پر فاصلہ کی ۳ اکائیاں
کسی پیٹری یا پیمانہ کی مدد سے نا پنی چاہئیں اور پھر اسی یا کسی اور پیمانہ
کے موافق ۸ اکائیاں سیدھے اوپر کی طرف محور ما کے متوازی جانا چاہیئے

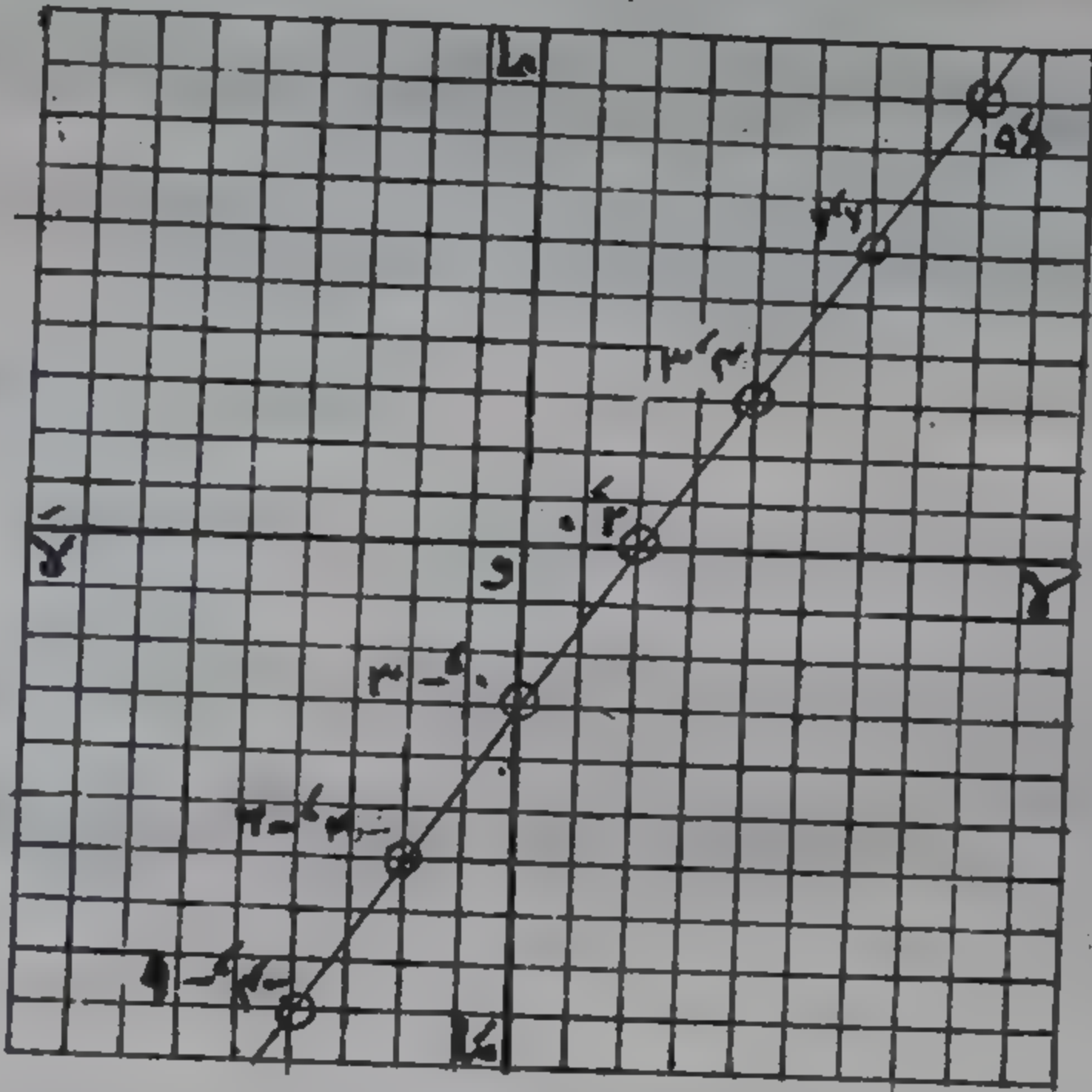
اس طرح سے نقطہ مفروضہ کا مقام متعین ہو جائے گا۔ جب نقطہ کے محدود معلوم ہوں تو اس طرح سے اس کے مقام معلوم کرنے کے عمل کو نقطہ کا رسم کرنا یا هر قسم کرنا کہتے ہیں۔ یہ عمل نہایت آسانی سے مربع دار کا غذ کی مدد سے ہو سکتا ہے، مربع دار کا غذ پر متساوی الفاصل افقی اور عمودی خط کھینچے ہوئے ہوتے ہیں اور ہر پانچواں یا دسواں خط اور خطوں کی نسبت قدرے جلی ہوتا ہے جس کی وجہ سے ان سمتوں میں فاصلوں کا پنا آسان ہو جاتا ہے۔

مربع دار کا غذ کے استعمال سے پیمانہ کی ضرورت نہیں رہتی کیونکہ فی الحقیقت اس کا غذ کے ہر مقام پر پیمانہ مندرج ہوتا ہے۔
مربع دار کا غذ بالعموم دو طرح کا ہوتا ہے، ایک وہ جو انچوں اور انچ کے دسویں حصوں میں تقسیم کیا ہوا ہوتا ہے اور دوسرا وہ جو سنتی میٹر اور اور اس کے دسویں حصوں میں منقسم ہوتا ہے، بندی کو چاہیے کہ انچوں والا کا غذ استعمال کرے تاکہ شکلیں درست اور کشادہ ہوں۔
نوٹ۔۔ انچوں والے کا غذ میں سب سے چھوٹے خانہ کا ضلع $\frac{1}{16}$ انچ ہے اس ضلع کو بعض اوقات ہم چھوٹا حصہ کہیں گے۔

طالب علم کو یہ خیال پیدا نہ ہو کہ ترسیات اور مربع دار کا غذ کے استعمال کے لئے علم ریاضی کے دقیق مسائل کا جتنا ضروری ہے، تجارت پیشہ لوگ اور دوکاندار اس کا غذ کو بے تکلف استعمال کرتے ہیں اور وہ ریاضی کے مسائل سے چنداں واقف نہیں ہوتے۔

محوروں کے عام استعمال اور مربع دار کا غذ پر نقطہ رسم کرنے کی چند ابتدائی مثالیں ہم ذیل میں درج کرتے ہیں، کا غذ پر نقطہ رسم کرنے میں طالب علم کو باریک نوکدار سخت پسل استعمال کرنی چاہیے نقطہ کا مقام ظاہر کرنے کے لئے اس کے گرد ایک چھوٹا دائرہ بنایا جائے یا عین اس مقام پر ایک چھوٹا چلیبی نشان بنادیا جاسکتا ہے جس کی شاخوں کا نقطہ تقاطع ٹھیک مقام مطلوبہ پر منطبق ہو۔

مشق ۱۔ فکل کھینچنے سے نقاط (۳،۲) (۴،۳) (۵،۴) (۶،۵) (۷،۶) (۸،۷) (۹،۸) کے مقام دریافت کرو اور بتاؤ کہ یہ لقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔
سب سے پہلے محور لا ولا اور ما و ما کھینچو۔



نیز بیان کے لئے فرض کرو کہ دونوں محوروں پر طول کی اکائی چھوٹے مربع کے ایک ضلع سے (یعنی چھوٹے حصہ) سے تعبیر ہوتی ہے، اس شکل میں جو کا غذا استعمال کیا گیا ہے اس میں ایک انچ دس مساوی حصوں میں منقسم ہے، اس لئے فکل کا بیان ہوگا

$$\frac{1}{10} \text{ انچ} = 1 \text{ یعنی } \left(\frac{1}{10} = 1 \right)$$

اب نقطہ (۶،۶) کا مقام معلوم کرنے کے لئے ۶ اکائیاں یعنی ۶ چھوٹے محور لا پر دائیں جانب اور ۶ چھوٹے حصے اوپر کی طرف محور ما کے متوازی لو اور اس مقام کو ظاہر کرنے کے لئے ایک نشان بتا دو۔

(۰،۲) کا مقام معلوم کرنے کے لئے ۲ چھوٹے حصے دائیں جانب محور لا پر لو اور بس، کیونکہ اس کا معین صفر ہے، ہم جانتے ہیں کہ محور لا پر کے سب نقاط کے ما محدود یعنی معین صفر ہوتے ہیں۔

اسی طرح (۳،۰) کا مقام معلوم کرنے کے لئے مبدأ سے محور لا پر دائیں جانب جانے کی ضرورت نہیں کیونکہ اس نقطہ کا فصلہ صفر ہے، لیکن مبدأ سے ۳ چھوٹے حصے محور ما پر نیچے کی طرف جانا ہوگا۔ یہ نقطہ محور ما پر واقع ہے اس لئے اس کا فصلہ صفر ہے، باقی نقاط کے مقامات کا تعین بھی

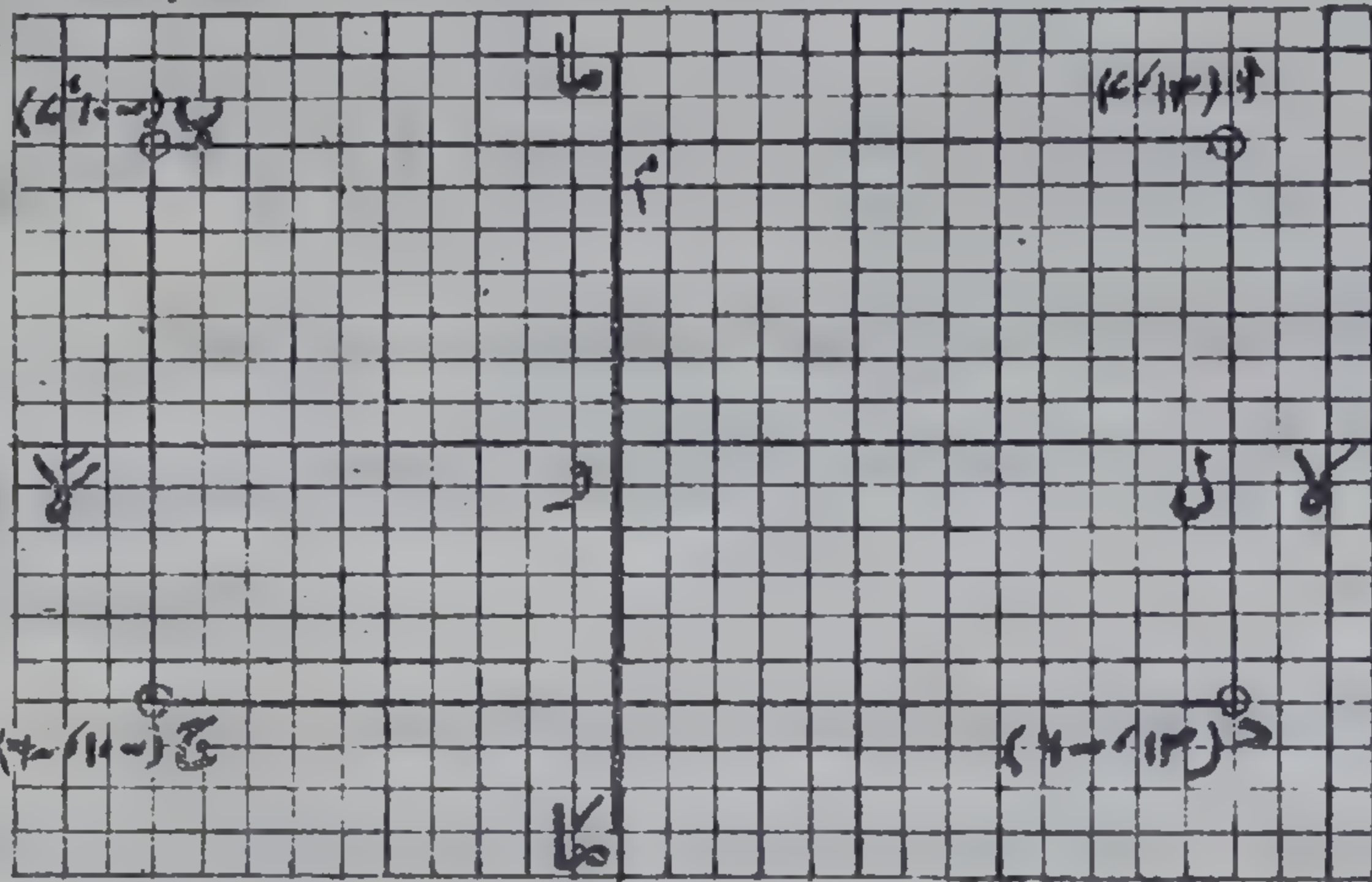
اسی طرح ہو سکتا ہے۔

مثلاً (۶-۱۲) کے لئے ۲ حصے بائیں جانب اور ۶ نیچے کی طرف اور
(۹-۱۴) کے لئے ۴ بائیں طرف اور ۹ نیچے جانا ہوگا۔

ان سب نقطوں کے مقامات کے گرد چھوٹے چھوٹے دائرے بنائے
گئے ہیں اور ان مقامات پر ایک کالے تاگے کو تان کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ
سب کے سب قریب قریب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

شکل میں ایک سیدھی پٹری سے وہ مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو قریب قریب
ان نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

مشق ۲۔ نقاط (۱۳، ۷)، (۱۰، ۷)، (۱۰، ۶)، (۱۳، ۶) ج
د (۱۳، ۶) کو مربع دار کا غز پر مرتسم کرو اور ذرا بعد الاصلاع (۱۳، ۶) ج د
کے اصلاع کا طول اور رقبہ دریافت کرو



دونوں
محوروں کی سمتوں
میں طول کی
اکائی کو چھوٹے
مربع کے ضلع
سے تعبیر کرو۔
(۱ = ۱)
۱۳ (۱۳، ۷) کو
مرتسم کرنے کے
لئے اس اکائیاں
(چھوٹے حصے)

دائیں جانب اور ۷ اوپر کی طرف لو۔ اور اس مقام کے گرد ایک چھوٹا دائرہ کھینچو۔
ب (۱۰، ۷) کو مرتسم کرنے کے لئے ۱۰ حصے بائیں طرف اور ۷ اوپر کی طرف لو۔
ج (۱۰، ۶) ۱۰ " ۶ " ۶ نیچے کی طرف لو

د (۱۳-۶) کو مرتسم کرنے کے لئے ۱۳ حصے دائیں طرف ۶ نیچے کی طرف لو۔
 اب، ب ج، ج د، د ا کو ملاؤ، ظاہر ہے کہ ا ب ج د ایک مستطیل ہے۔
 جس میں ب ا = ب م + م ا = - (۱۰) + ۱۳ = ۲۳ جس کی تصدیق خانے
 گننے سے ہو سکتی ہے۔

اور د ا = د ل + ل ا = - (۶) + ۱۳ = ۷
 پس اصلاع کے طول بالترتیب ۲۳ اور ۱۳ اکائیاں ہیں اور اکائی چھوٹے
 حصہ یعنی $\frac{1}{13}$ اینچ کے مساوی ہے اس لئے اصلاع کے طول بالترتیب ۲۳
 اینچ اور ۱۳ اینچ ہیں۔

افقی خط مستطیل کو ۱۳ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ایسے ہر ٹکڑے میں ۲۳ چھوٹے
 مربعے ہیں، اس لئے مستطیل ا ب ج د میں چھوٹے مربعوں کی کل تعداد
 $۲۳ \times ۱۳ = ۲۹۹$ ہوگی یعنی ا ب ج د کا رقبہ ایک چھوٹے مربع کے رقبہ کا
 ۲۹۹ گنا ہے۔

چونکہ چھوٹے مربع کا رقبہ $= \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$ مربع اینچ

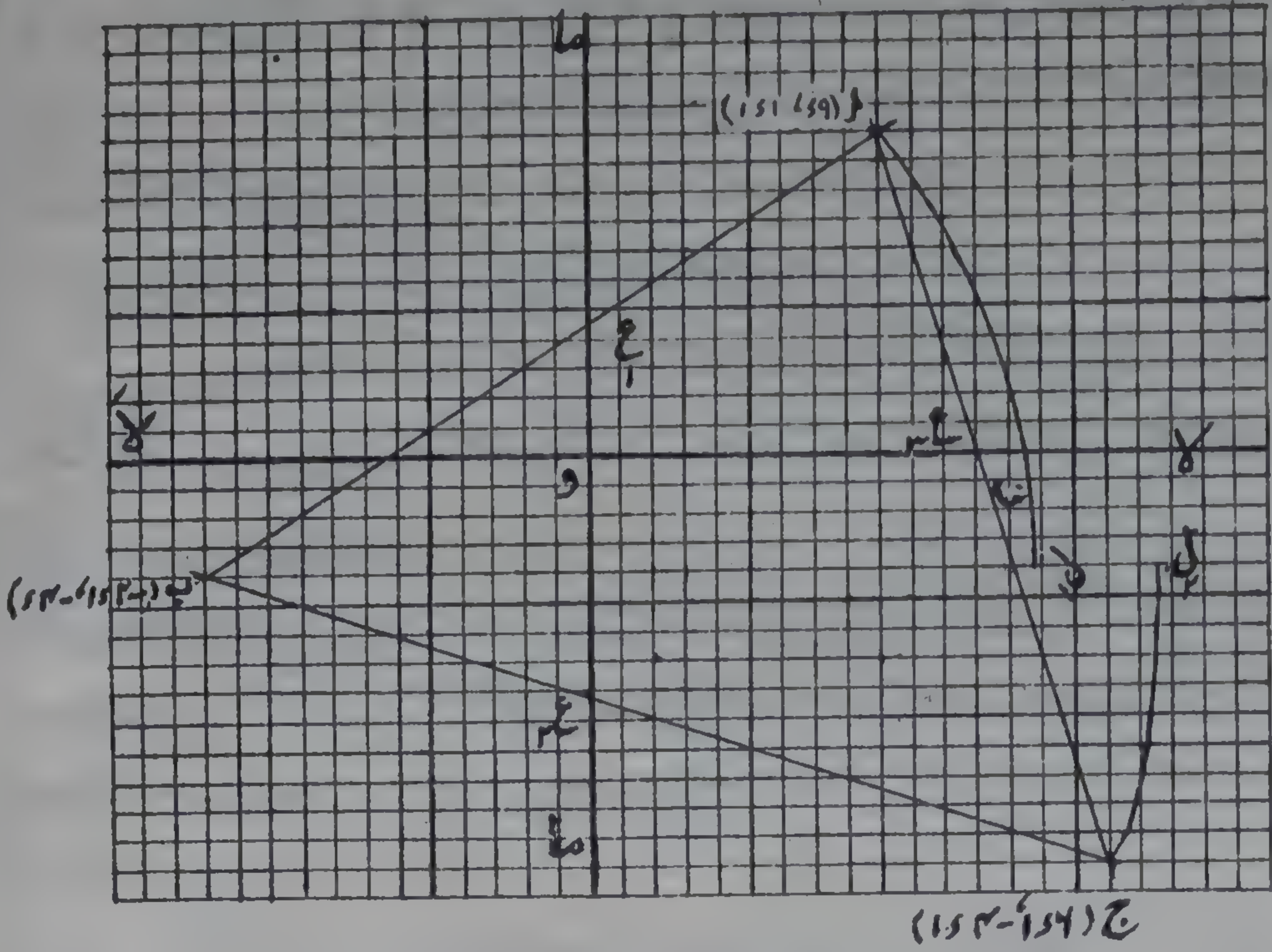
اس لئے ا ب ج د کا رقبہ $= ۲۹۹ \times \frac{1}{169} = ۱.۷۴$ مربع اینچ

مشق ۳۔ ایک مثلث کے راس بالترتیب ا (۹، ۱، ۱)، ب (۲، ۱، ۲) ج (۶، ۱، ۱) ہیں، اس کو بناؤ اور جن نقطوں پر
 اس کے اصلاع محوروں سے ملتے ہیں ان کے محدود معلوم کرو، نیز اس مثلث کا
 رقبہ اور اس کے اصلاع کے طول معلوم کرو۔

اس مثال میں مشق ۲ کی نسبت فاصلہ ناپنے کی بڑی اکائی منتخب
 کرنی چاہیے فرض کرو کہ دونوں محوروں پر اکائی ایک اینچ سے تعبیر ہوتی
 ہے، اس صورت میں چھوٹا حصہ اکائی کے $\frac{1}{13}$ یعنی ا، کو تعبیر کرے گا۔ ا کو
 مرتسم کرنے کے لئے ۹ چھوٹے حصے دائیں طرف اور ۱۱ حصے اوپر کی طرف
 جانا ہوگا کیونکہ ایک چھوٹا حصہ ا کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح ب (۲، ۱، ۲) کے لئے ۱۲ حصے بائیں طرف اور ۴ حصے نیچے جانا ہوگا

اور ج (۱۵۶-۱۵۳) کے لئے ۱۶ حصے دائیں طرف اور ۱۴ حصے نیچے جانا ہوگا



ضلع اب محور ما کو ع پر قطع کرتا ہے، اب ع مبدأ سے چوتھے اور پانچویں افقی خطوط کے درمیان واقع ہے یعنی فاصلہ و ع، ۱۴ اور ۱۵ کے درمیان ہے۔ اگر اس چھوٹے حصے کو جس میں ع واقع ہے دس مساوی حصوں میں تقسیم کیا ہوا خیال کریں تو ایسا ہر ایک حصہ ۱/۱۰ یعنی ۱۰ کے مساوی ہوگا ایسے پانچ حصے ۱۰ کے مساوی ہونے وغیرہ وغیرہ، اب نقطہ ع خطوط مذکورہ کے درمیان کے نقطہ سے کچھ نیچے ہے، اس لئے جہاں تک ہم دیکھ سکتے ہیں

و ع = ۳۴، گویا ع کے محدود (۳۴، ۳۳) ہیں کیونکہ یہ نقطہ محور ما پر مبدأ سے اوپر کی جانب واقع ہے۔

اسی طرح ب ج اور محور ما کے نقطہ تقاطع ع م کے محدود قریب قریب (۸۶-۸۵) ہیں

اور ج ۱ اور محور لا لا کے نقطہ تقاطع ع م کے محدود قریب قریب

(۲۱ و ۲۰) ہیں۔
 رقبہ دریافت کرنے کے لئے مثلث کے اندر چھوٹے مربعوں کی تعداد معلوم
 کرو، اور ایسا کرنے میں چھوٹے مربع کی کسروں کو بھی ملحوظ رکھو، جو نصف کے
 برابر یا نصف سے زیادہ ہوں ان کو پورا مربع شمار کرو اور جو نصف سے کم ہوں
 ان کو نظر انداز کرو۔

مثلث ا ب ج میں چھوٹے مربعوں کی کل تعداد ۳۱۵ ہے، اور چھوٹے
 مربع کا رقبہ $15 \times 15 = 225$ مربع اکائیاں، اس لئے مثلث ا ب ج کا رقبہ
 $225 + 15 = 240$ مربع اکائیاں یا مربع لہج۔

ا ب کا طول معلوم کرنے کے لئے ب کو مرکز اور ب ل کو نصف
 قطمان کر پرکار سے ایک دائرہ کی توس کھینچو جو ب میں سے گزرنے والے
 افقی خط کو ل، پر لے، تب ب ل = ب ل = ۲۶ چھوٹے حصے = ۲۶
 اکائیاں، اسی طرح ب کو مرکز اور ب ج کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو
 جو افقی خط سے ل، پر لے، تب ب ج = ب ل = ۲۹ و ۸ چھوٹے
 حصے = ۲۹ و ۸ اکائیاں، اسی طرح ج ل کا طول معلوم ہو سکتا ہے، پٹری
 سے ناپ کر ان نتائج کی تصدیق کرو۔

اگلی دفعہ میں ہم نظری طریق پر ایسے دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم
 کریں گے جن کے محدود معلوم ہوں۔

امثلہ نمبری ۲

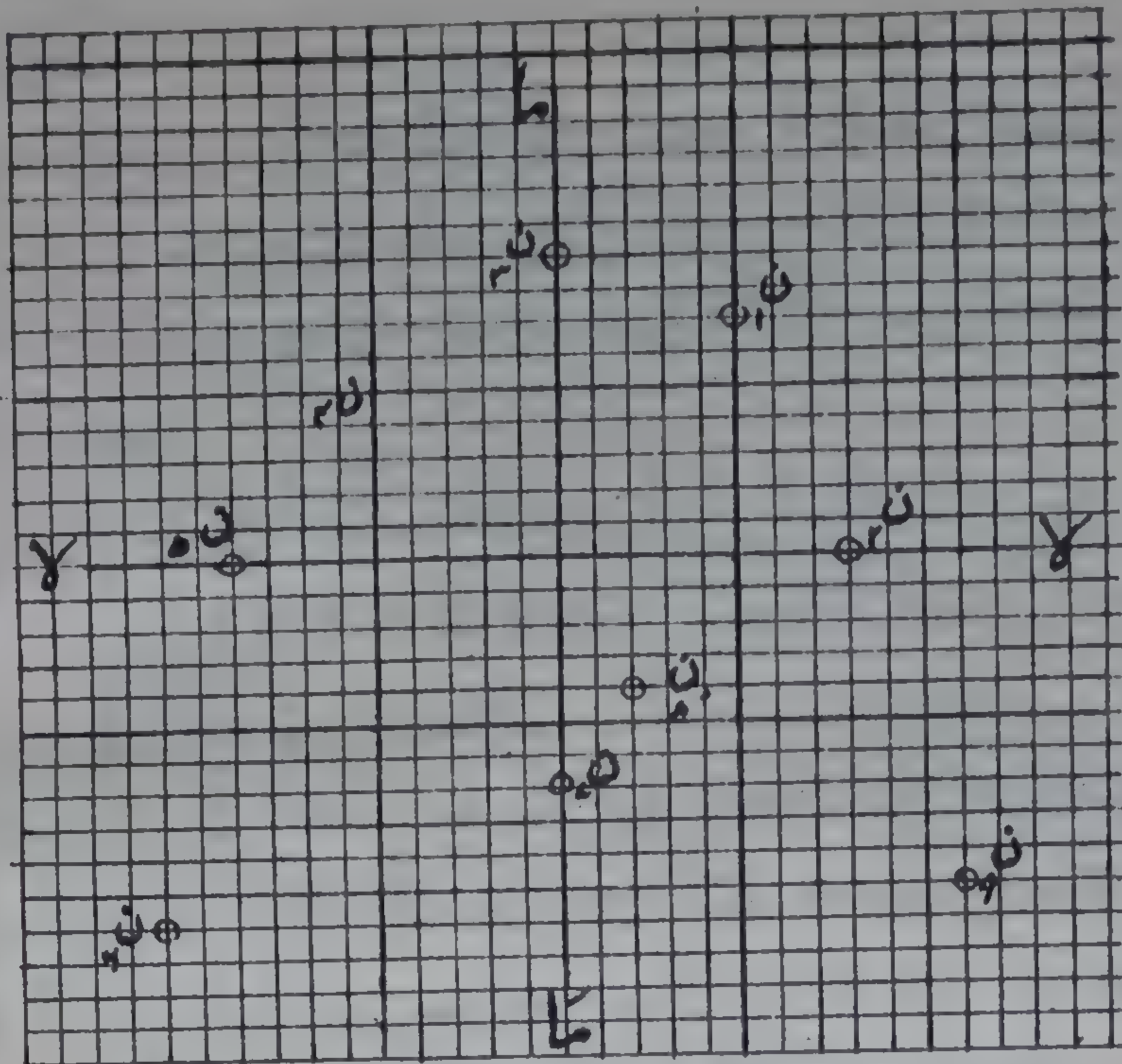
۱۔ اگلے صفحہ کی شکل میں

(ا) ایک انچ کے دسویں حصہ کو

(ب) ایک انچ کو

(ج) ایک انچ کے نصف کو

طول کی اکائی مان کر نقاط ن، ن، ن، ن، ن، ن، ن، ن کے محدود معلوم کرو۔


$$(4-6) \quad (46) \quad (46-)(46) \quad (46) \quad (1)$$
$$(14 - '14 -)' (9 - '9 -)' (14 '14)' (9 '9) (r)$$
$$(11-14)^{(1)}(11-14)^{(2)}(11-14)^{(3)}(11-14)^{(4)}(11-14)^{(5)}$$
$$(1 = \frac{1}{10}) \text{ يان }$$

۵۔ نقاط ذیل کو مرسم کرو۔

$$(r_{\frac{p}{2}}', 1, \frac{p}{4})' (\overline{r}_1, \overline{r}_2) (150A' P54P)' (150' P5P) (1)$$
$$(15. \pi' \pi \pi -)' (504' 1504 -)' (15 \pi' \pi \pi -) (2)$$
$$(sac - 1rsrr)^4 (1sdr - 1rsrr)^4 (scl - 1srr -) (r)$$

بیانہ۔ اکائی کو ایک ایچ سے تعبیر کرو ($1 = 1$)
۷۔ ثابت کرو کہ ذیل کی ہر صورت میں جن نقطوں کے محدود دئے گئے ہیں وہ نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

(۱) (۱، ۳)، (۲، ۵)، (۳، ۷)، (۴، ۹)، (۵، ۱۱)

(۲) (۲، ۴)، (۳، ۶)، (۴، ۸)، (۵، ۱۰)، (۶، ۱۲)

(۳) (۲، ۴)، (۳، ۶)، (۴، ۸)، (۵، ۱۰)، (۶، ۱۲)

(۴) (۳، ۶)، (۴، ۸)، (۵، ۱۰)، (۶، ۱۲)، (۷، ۱۴)

۸۔ جہاں ذیل کے نقطوں کو ملانے والے خط (محدودہ بشرط ضرورت) محاورہ لاوا اور محاورہ سے ملتے ہیں ان نقطوں کے محدود معلوم کرو۔

(۱) (۳، ۴)، (۴، ۵)، (۵، ۶)، (۶، ۷)، (۷، ۸)

(ج) (۲، ۴)، (۳، ۶)، (۴، ۸)

۸۔ ذیل کی ہر ایک صورت میں چاروں نقطوں کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ نقطے ایک مستطیل کے رأس ہیں، نیز ہر صورت میں مستطیل کے اضلاع کے طول اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) (۵، ۲۲)، (۵، ۹)، (۱۳، ۹)، (۱۳، ۲۲)

(۲) (۶، ۲)، (۶، ۱۳)، (۱۴، ۱۳)، (۱۴، ۲)

بیانہ $\frac{1}{2}$ ایچ = ۱
۹۔ ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کو مرتسم کرو اور ان کو ملانے سے جو مثلث بنیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(۱) (۰، ۰)، (۰، ۲۰)، (۲۰، ۲۰)

(۲) (۸، ۱۶)، (۸، ۱۳)، (۱۳، ۱۳)

(۳) (۱۲، ۱۶)، (۱۲، ۱۰)، (۱۰، ۱۶)

بیانہ $\frac{1}{2}$ ایچ = ۱

۱۰۔ ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(۱) (۰، ۰) ، (۰، ۳) ، (۳، ۳) ، (۳، ۰)

(۲) (۰، ۴) ، (۴، ۰) ، (۰، ۳) ، (۳، ۰) ، (۳، ۳) ، (۳، ۴)

(۳) (۱، ۱) ، (۱، ۲) ، (۲، ۱) ، (۲، ۲)

(۴) (۲، ۲) ، (۲، ۳) ، (۳، ۲) ، (۳، ۳)

۱۱۔ ذیل کی ہر صورت میں چار نقطوں کو ملانے سے جو ذواربعتہ الاضلاع بنے اس کے اضلاع کے طول اور رقبہ دریافت کرو۔ پیمانہ ۱ = ۱

(۱) (۲، ۳) ، (۳، ۲) ، (۲، ۱) ، (۱، ۲)

(۲) (۳، ۲) ، (۲، ۳) ، (۳، ۰) ، (۰، ۳)

(۳) (۱، ۳) ، (۳، ۱) ، (۲، ۳) ، (۳، ۲)

(۴) (۱، ۳) ، (۳، ۱) ، (۲، ۳) ، (۳، ۲)

(۵) (۲، ۲) ، (۲، ۳) ، (۳، ۲) ، (۳، ۳)

(۶) (۲، ۲) ، (۲، ۳) ، (۳، ۲) ، (۳، ۳)

(۱، ۳) ، (۳، ۱)

۱۲۔ ذیل کی چار صورتوں میں نقاط ۱، ۲، ۳، ۴ کے محدودے گئے ہیں خطوط ۱، ۲، ۳، ۴ کے نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کرو اور ہر صورت میں ذواربعتہ الاضلاع ۱، ۲، ۳، ۴ کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) (۱، ۲) ، (۲، ۲) ، (۲، ۱) ، (۱، ۱)

(۲) (۱، ۳) ، (۳، ۱) ، (۳، ۲) ، (۲، ۳)

(۳) (۱، ۳) ، (۳، ۱) ، (۳، ۲)

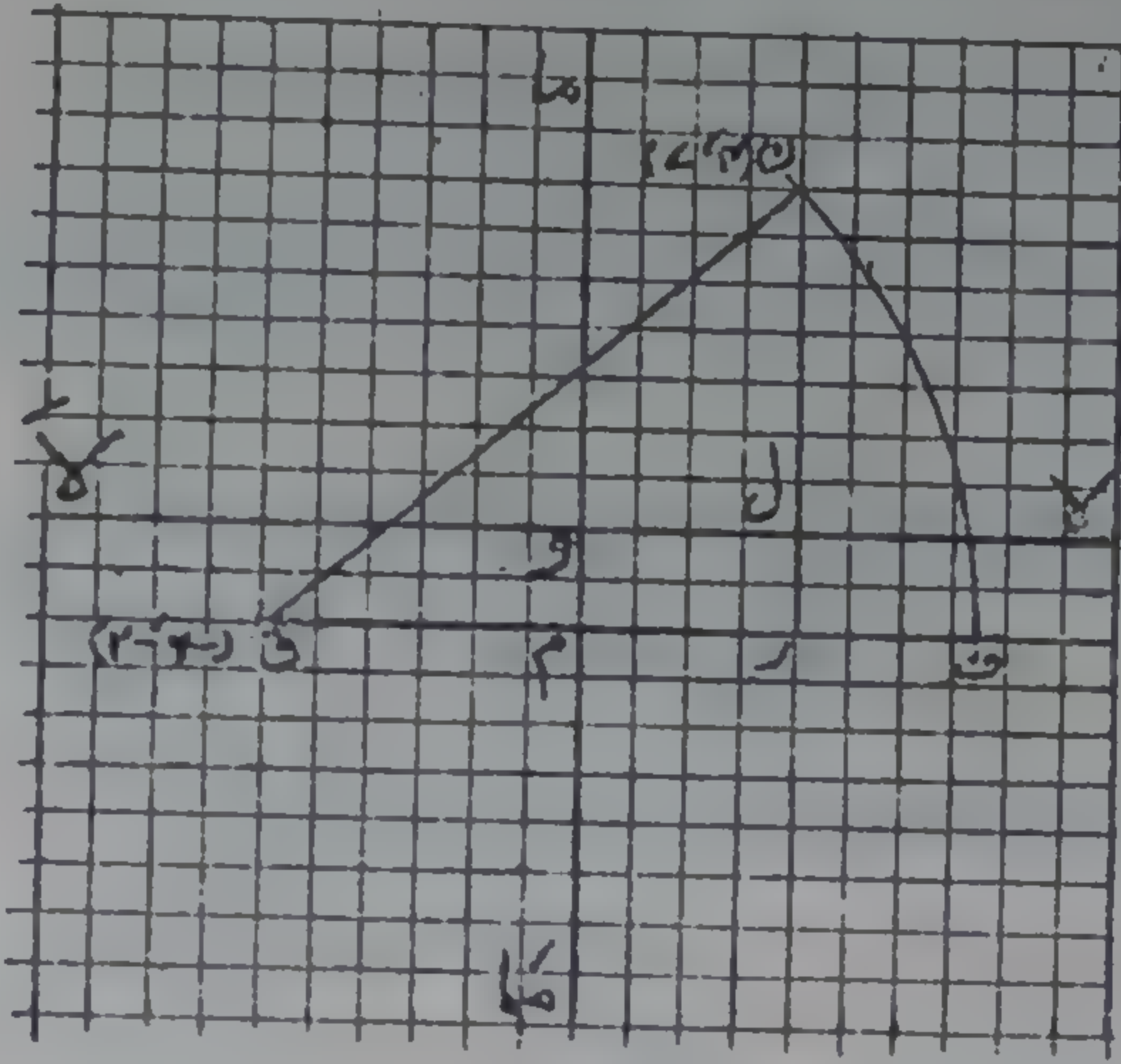
(۴) (۱، ۳) ، (۳، ۱) ، (۳، ۲)

(۵) (۱، ۳) ، (۳، ۱)

(۶) (۱، ۳) ، (۳، ۱) ، (۳، ۲)

(۷) (۱، ۳) ، (۳، ۱)

۸۔ ایک مستقیم خط نقاط (۲، ۱۶) ق (۷، ۳) کو ملاتا ہے، اس کا طول معلوم کرو۔



فاصلہ ن ق کی تقریبی
قیمت اس طرح معلوم ہو سکتی
ہے نقطوں کو مرسم کرنے کے
بعد ق کو مرکز مان کر ق ن
کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو
جو ق میں سے گزرنے والے
افقی خط سے ف پر ملے،
ق ف = ۴، ۳، ۱ اکائیوں
تقریباً

جن دو نقطوں کے محدودے ہوئے ہوں ان کا باہمی فاصلہ ان محدودوں
کی رقوم میں نظری طریق پر بھی معلوم ہو سکتا ہے،
ن سے محور ما کے متوازی اور ق سے محور لا کے متوازی خطوط
ن ر، ق ر کھینچو جو ایک دوسرے کو ر پر قطع کریں،
اب ن ق برابر ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کے اضلاع کے
مطلق طولوں میں یہ ربط ہے

$$ق ن^2 = ق ر^2 + ر ن^2$$

$$\text{لیکن } ق ر = م ر + ق م = ۴ - (۶ -) = ۲ = \text{فصلہ ن} = \text{فصلہ ق}$$

$$ر ن = ل ن + ر ل = ۷ - ۴ = (۲ -) = \text{معتین ن} - \text{معتین ق}$$

$$ق ن^2 = (\text{فصلہ ن} - \text{فصلہ ق})^2 + (\text{معتین ن} - \text{معتین ق})^2$$

$$۱۸۱ = ۲۹ + ۱۰ = \{(۲ -) - ۴ +\}^2 + \{(۶ -) - ۳ +\}^2 =$$

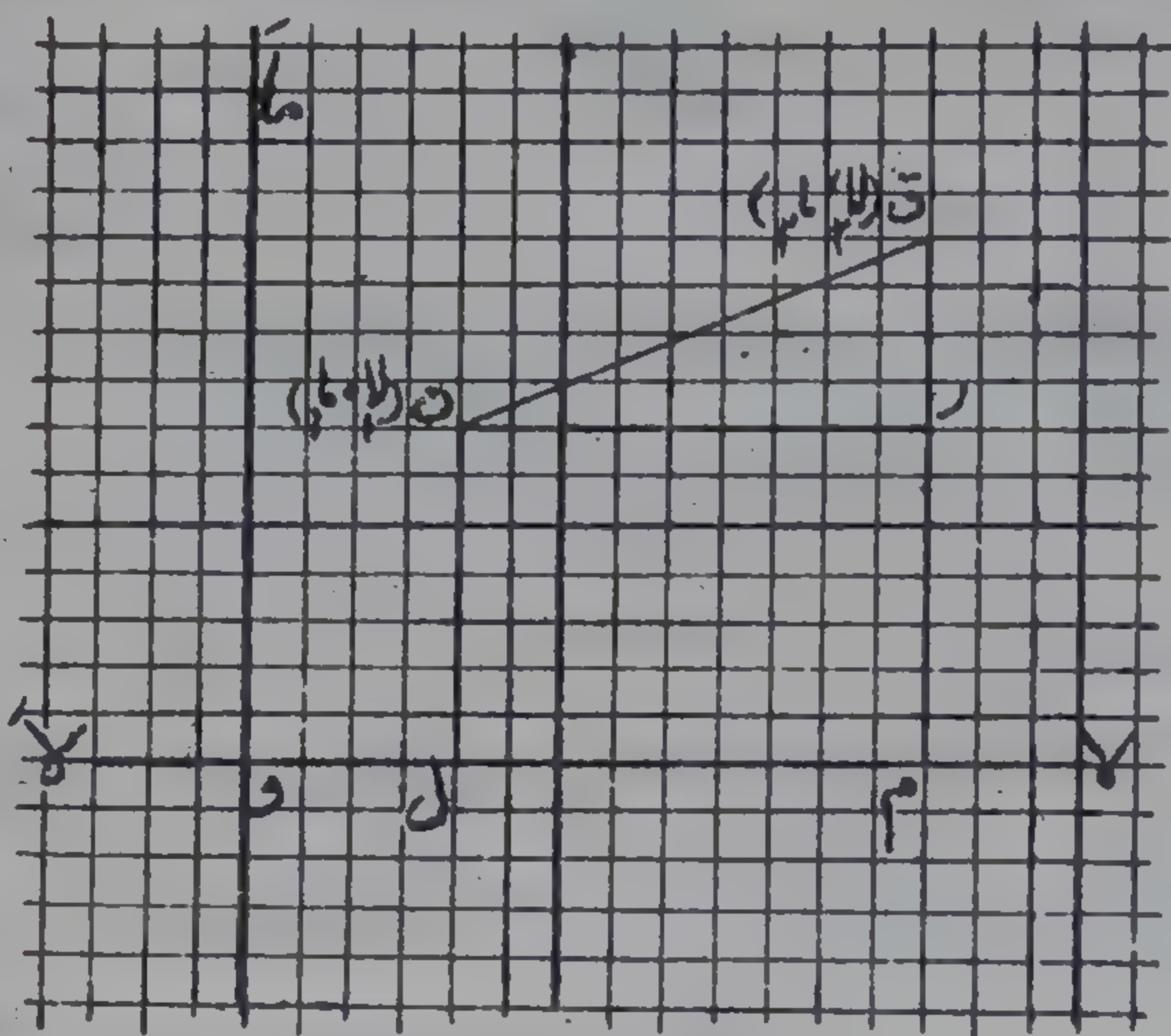
$$ق ن = ۱۳ = ۱۸۱ = \dots = ۱۳$$

اور پیمائش سے = ۱۳۰ و ۱۳۰
ہم نے اوپر دیکھا کہ اگر نقاط ن اور ق کے محدود معلوم ہوں تو
فاصلہ ن ق = (فصلہ ن - فصلہ ق) + (معین ن - معین ق)

یعنی فاصلہ ن ق = (فصلہ ن - فصلہ ق) + (معین ن - معین ق)

عام صورت میں محدودوں کو جبریہ حروف سے تعبیر کر کے ہم اس ضابطہ کو اگلی دفعہ میں ثابت کرینگے۔

4۔ دو نقطوں کا باہمی فاصلہ ان کے محدودوں کی رقوم میں معلوم کرو۔
فرض کرو کہ مفروضہ



نقطے ن (لا، لا) اور ق (لا، لا)
ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ
محدودوں کی رقوم میں مطلوب
ہے، لا لا پر عمود ن ل
اور ق م کھینچو اور نقطہ ن
سے ن ر محور لا کے متوازی
کھینچو جو ق م سے پر ملے۔
تب ن ق = ن ر + ر ق

اب ن ر = ل م = و م - و ل = لا - لا

جو (فصلہ ق - فصلہ ن) کے مساوی ہے

اور ر ق = م ق - م ر = م ق - ل ن = ما - ما

جو (معین ق - معین ن) کے مساوی ہے

ن ر اور ر ق کو تعبیر کرنے والے جملے لا - لا اور ما - ما ہر حالت میں

یہی رہیں گے خواہ ن اور ق بلحاظ ایک دوسرے کے کہیں واقع ہوں۔

$$\text{اس لئے } ق = (لا - لا) + (ما - ما)$$

$$\text{یعنی } ق = ما (لا - لا) + (ما - ما)$$

$$\text{یا } ق = ما (فصلق - فصلن) + (متین ق - معین ن)$$

فرع - اگر ن مبدأ پر منطبق ہو، یعنی لا = اور ما =

$$\text{تو } ق = ما (لا + لا)$$

مشق ۱ - نقاط (۱، ۲۵) اور ب (-۱، ۱۵) کا فاصلہ معلوم کرو۔

$$اب = (لا - لا) + (ما - ما)$$

$$= (-۱ - ۱۵) + (۲۵ - ۱)$$

$$= ۱۲۵ - ۱۶ =$$

$$۱۰۹ =$$

$$\text{اس لئے } اب = ۱۰۹ = ۳۵۳۵$$

طالب علم کو چاہیے کہ ان نقطوں کو مربع دار کا غز پر مرتسم کرے اور پیمائش سے

اس نتیجہ کی تصدیق کرے۔

مشق ۲ - ایک نقطہ (لا، ما) ایک ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے جس کا مرکز مبدأ ہے

اور جس کا نصف قطر ۵ ہے،

(لا، ما) کا باہمی ربط دریافت

کرو۔

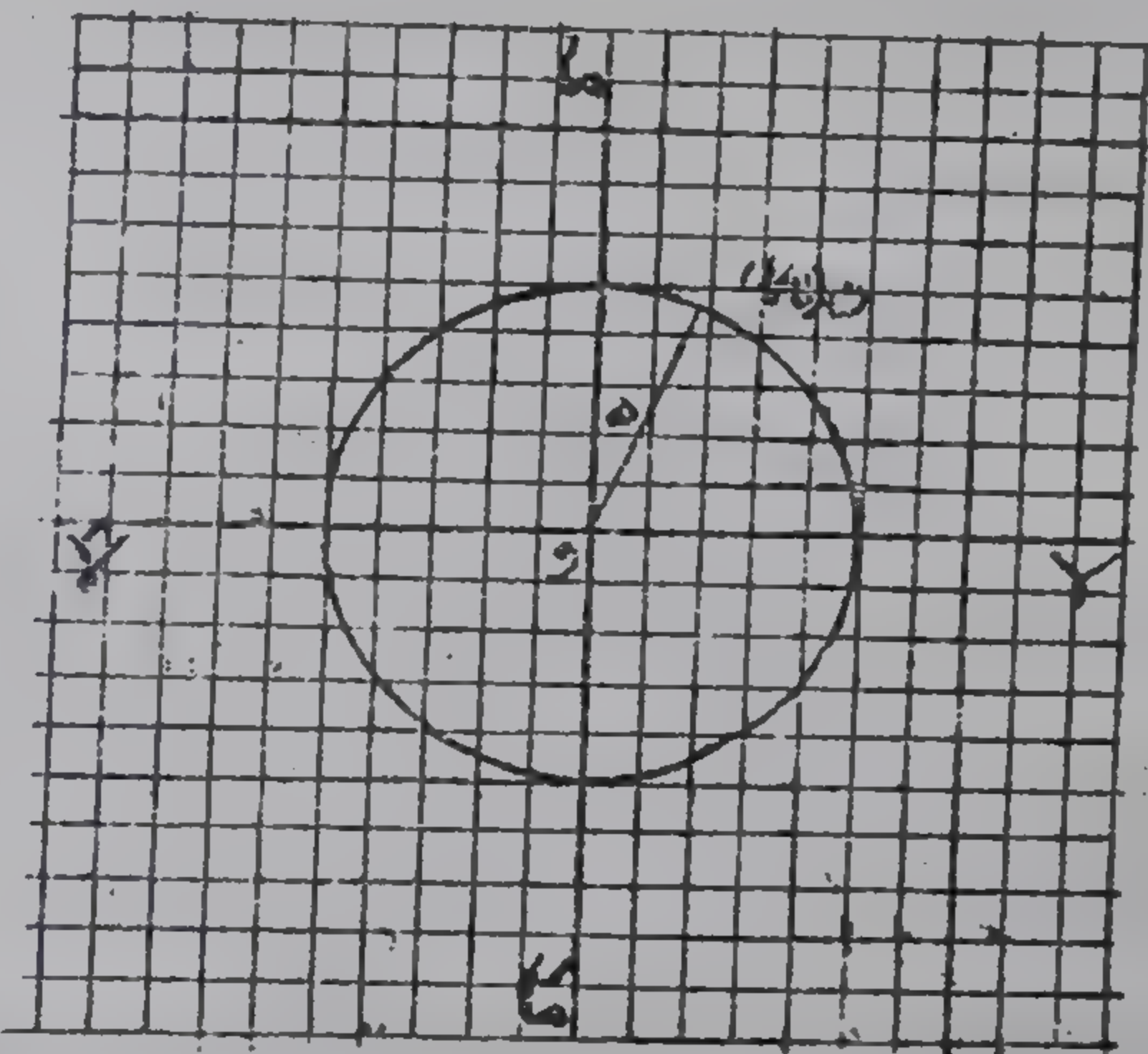
نقطہ ن دائرہ کے

محیط پر خواہ کہیں واقع ہو

اس کا فاصلہ مبدأ

و (۰، ۰) سے ہمیشہ ۵ کے

مساوی ہوگا۔



$$\text{اب فاصلہ ون} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-2)^2} = 5$$

$$\text{یعنی } 1^2 + 2^2 = 5 = 2^2 + 1^2 \quad (1)$$

پس (۱) لازمی شرط ہے کہ نقطہ (۱، ۲) دائرہ مفروضہ کے محیط پر واقع ہو۔
رابطہ (۱) ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے جہاں نقطہ کے محدود لا اور ما
دو مجہول مقداریں ہیں اور ظاہر ہے کہ محیط دائرہ کے ہر نقطے کے محدود اس مساوات
کو پورا کرتے ہیں، اس لحاظ سے ربط (۱) کو ہم اس دائرہ کی مساوات کہہ سکتے ہیں۔

۱۔ مثلہ نمبری ۳

۱۔ جن نقطوں کے زوج ذیل میں مندرج ہیں ان کے باہمی فاصلے دریافت کرو۔

$$(1) (0,0), (0,5)$$

$$(2) (0,0), (3,4)$$

$$(3) (0,0), (4,5)$$

$$(4) (0,0), (4,3)$$

تیز ثابت کرو کہ یہ سب نقطے ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۔ ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کے جو زوج دئے گئے ہیں ان کے باہمی
فاصلے دریافت کرو۔

$$(1) (1,4), (3,5)$$

$$(2) (1,3), (2,1)$$

$$(3) (1,2), (2,5)$$

$$(4) (3,3), (4,4)$$

۳۔ ثابت کرو کہ نقاط ذیل ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز
(۱، ۱) ہے اور جس کا نصف قطر ۵ ہے۔

$$(1) (1,0), (0,1), (3,1), (1,3)$$

$$(2) (0,3), (3,0), (1,5), (5,1)$$

۴۔ نقاط (۱، ۳)، (۳، ۱)، (۵، ۱۲)، (۱۲، ۵) کے سب ایک دائرہ کے
محیط پر واقع ہوتے ہیں، دائرہ کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو۔

۵۔ نقاط (۶، ۳) اور (۲، ۵) سے نقطہ (۱۰، -۱۸) کے فاصلے دریافت کرو۔
 اور ثابت کرو کہ یہ فاصلے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔
 ۶۔ ایک جہاز کا مقام ایک روشنی گھر سے ۸ میل شمال اور ۶ میل مشرق کی طرف
 ہے اور ایک دوسرے جہاز کا مقام اسی روشنی گھر سے ۳ میل شمال اور چھ
 میل مغرب کی طرف ہے، دونوں جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو اور نتیجہ معلوم
 کرو کہ پہلا جہاز روشنی گھر سے کتنی دور ہے۔
 ۷۔ ایک نقطہ (۱۱، ۱۱) ایک ایسے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے جس کے مرکز
 اور نصف قطر ذیل میں مندرج ہیں۔

- (۱) مرکز (۳، ۴)، نصف قطر ۵
 - (۲) مرکز (۵، -۳)، نصف قطر ۷
 - (۳) مرکز (۱۰، ۰)، نصف قطر ۱
 - (۴) مرکز (۱، ۱)، نصف قطر ۲
- ہر صورت میں لایما کا باہمی ربط دریافت کرو۔

باب دوم

خطی مساوات کی ترسیم

۱۰۔ تفاعل۔ ہم جانتے ہیں کہ $۲ + ۳ = ۵$ ایک جملہ درجہ اول ہے جس میں صرف ایک جبریہ حرف لا شامل ہے اور باقی دو معلوم ہندسے ہیں۔ اس جملہ کی قیمت متعین نہیں ہو سکتی جب تک لا کی قیمت معلوم نہ ہو، اگر لا کی کوئی قیمت فرض کر لی جائے تو جملہ کی قیمت فوراً متعین ہو جاتی ہے۔ پس لا کے بدلنے یا مختلف قیمتیں اختیار کرنے سے یہ جملہ بھی مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے، مثلاً اگر ابتداً $لا = ۵$ و $۲ + ۳ = ۵$ تو جملہ $۲ + ۳ = ۵$ ، پھر اگر لا بدلتا ہے ۳ ہو جائے تو جملہ بدل کر ۹ ہو جاتا ہے، اسی طرح اگر لا مسلسل بدلتا جائے اور یہ قیمتیں

.....، ۳، ۲، ۱، ۰، ۱، ۲، ۳، سلسلہ وار اختیار کرے تو جملہ $۲ + ۳$ بھی بدلے گا اور لا کی ان قیمتوں کے جواب میں حسب ذیل قیمتیں

.....، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، اختیار کرے گا۔ اس عمل میں لا اور $۲ + ۳$ دونوں بدلتے ہیں یعنی متغیر ہیں باقی $۲، ۳$ معلوم ہندسے ہیں، وہ نہیں بدلتے، ان کو اس لحاظ سے مستقل مقداریں کہتے ہیں۔ اب لا متغیر ہے اور $۲ + ۳$ بھی، لیکن اگر ہم لا کو کوئی خاص قیمت دیں تو $۲ + ۳$ کی قیمت فوراً متعین ہو جاتی ہے، یعنی $۲ + ۳$ کی قیمت

لا کے تابع ہے، اس لئے $۲ + لا$ کو متغیر تابع کہتے ہیں اور لا کو متغیر متبوع۔
برعکس اس کے اگر ہم $۲ + لا$ کی قیمت پہلے مخصوص کر لیں تو لا کی قیمت مقرر
ہو جائے گی، اس صورت میں تابع اور متبوع کا تعلق الٹ جائیگا یہ صرف
سہولت پر مبنی ہے کہ کس متغیر کو تابع مانا جائے اور کس کو متبوع۔ ظاہر ہے کہ
موجودہ صورت میں اگر لا کو متغیر متبوع مانا جائے تو اس میں سہولت ہے۔

اوپر ہم نے $۲ + لا$ کو جملہ کہا ہے، اس لئے طالب علم اس سے زیادہ
مانوس ہوگا، لیکن جب متغیر مقداروں سے بحث ہو اور کسی جملہ اور اس کے
متغیرات کی قیمتوں کا باہمی اختصار پیش نظر ہو تو ریاضی دان $۲ + لا$ کو "ایک
ایسا جملہ جس میں لا شامل ہے" نہیں کہتے بلکہ اختصاراً اور دستوراً اس کو
"فنکشن لا" یعنی لا کا تفاعل کہتے ہیں۔

جملہ منظریات دنیا میں تبدیلی اور تغیر ہر طرف رونما ہے، جس دن سے
تغیرات عالم کے متعلق فن ریاضی کے قوانین منضبط ہونا شروع ہوئے اس
دن سے جدید ریاضی کی ابتدا ہوئی، تفاعل اور متغیر آج کل ریاضی کے ہر رگ
دریشہ میں بستہ اور پیوستہ ہیں۔

تقریباً۔ اگر ایک جملہ میں متغیر مقدار لا شامل ہو اور اس جملہ کی قیمت لا پر
منحصر ہو تو اس کو لا کا تفاعل کہتے ہیں۔

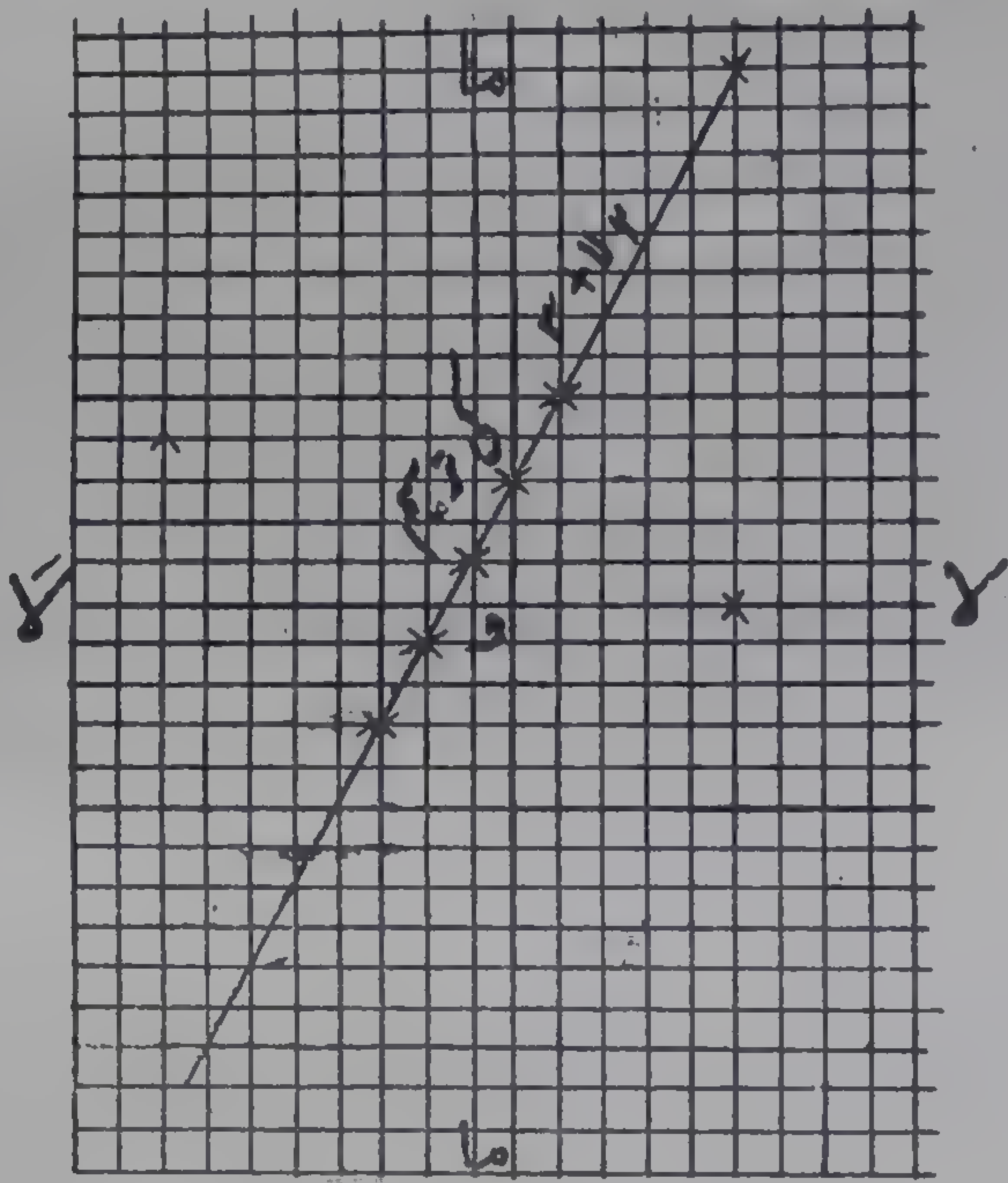
مثلاً $۲ + لا$ ، $\frac{۲ + لا}{۳}$ ، $۵ + لا$ وغیرہ میں سے ہر ایک لا کا تفاعل

درجہ اول ہے، اسی طرح $۲ + لا$ ، $۳ + لا$ ، $۴ + لا$ ، $۵ + لا$ ، $۶ + لا$ وغیرہ بالترتیب لا کے تفاعل درجہ دوم، سوم، چہارم ہیں۔ یاد رہے کہ متغیر
کی بڑی سے بڑی قوت تفاعل کے درجہ کو ظاہر کرتی ہے۔

لا کے کسی تفاعل کو اختصار کی خاطر $(لا)$ سے موسوم کرتے ہیں
اور اس کو پڑھتے ہیں، "فے لا"، مثلاً $(لا) = ۲ + لا$ ، یا $(لا) =$
 $۵ + لا$ وغیرہ وغیرہ جس سے یہ زیادہ واضح طور پر معلوم ہوتا ہے
کہ تفاعل مذکورہ متغیر ہیں اور ان کی قیمتیں لا پر موقوف ہیں اور صرف

اسی پر۔
تفاعل کی ترسیم۔ ہم جانتے ہیں کہ تفاعل درجہ اول ۲ لا + ۳ کی قیمت
لا پر منحصر ہے اور لا کو بتدریج عددی قیمتیں دینے سے ۲ لا + ۳ کی
تناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔ ان میں سے چند جدول ذیل میں مندرج
ہیں۔ طالب علم اس جدول کی توسیع جس قدر چاہے کر سکتا ہے۔

.....	۲	۱	۰	۱-	۲-	۳-	لا =
.....	۴	۵	۳	۱+	۱-	۳-	تفاعل ۲ لا + ۳ =



بیانہ ایک چھوٹا حصہ = اکائی

ان میں سے لا کی
کسی ایک قیمت مثلاً ۱-
کو فصلہ اور تفاعل کی
تناظر قیمت ۱+ کو معین
مان کر کسی مستوی سطح پر
ایک نقطہ مرتسم کرو۔
اس طرح سے لا اور
 ۲ لا + ۳ کی تناظر قیمتوں
کے مختلف زوجوں سے
سطح مستوی پر بے شمار
نقطے حاصل ہوتے ہیں
جن میں چند شکل بالا میں
دکھائے گئے ہیں۔ ان بے شمار نقطوں کو ملائے
کی ترسیم کہلاتا ہے۔

جدول بالا میں اگر لا کی قیمتیں ایک دوسرے کے بالکل قریب
قریب لی جائیں تو طالب علم اس کی تصدیق کر سکتا ہے کہ سطح مستوی پر

جو نقطے ان کے جواب میں حاصل ہونگے وہ ایک دوسرے کے نہایت قریب قریب واقع ہونگے اور ترسیم مطلوبہ مسلسل ہوگی۔

۱۱۔ مساواتیں۔ دو جبریہ جلوں کے باہم مساوی ہونے سے جبریہ مساوات پیدا ہوتی ہے، عام طور پر ان جلوں کی تمام رقوموں کو ایک طرف منتقل کر دیتے ہیں اور علامت تساوی کے دوسری طرف صفرہ جاتا ہے مثلاً $۳ لا + ۲ = ۰$ اور $۲ لا + ۳ لا + ۴ = ۰$ وغیرہ وغیرہ ان مساواتوں میں ۲ ، ۳ ، ۴ وغیرہ معلوم مقداریں ہیں اور $لا$ یا وغیرہ کو مجهول مقداریں کہتے ہیں۔

مجهول مقداریں طبعی یا ہندسی مقادیر ہو سکتی ہیں مثلاً طول، حجم، تپش، دباؤ، نقطہ کے محدود وغیرہ وغیرہ۔

مثلاً فرض کرو کہ ایک میز کے طول کا ۵ گنا ۸ فٹ ہے

$$۵ \times \text{میز کا طول} = ۸ \text{ فٹ}$$

$$\text{یعنی میز کا طول} = \frac{۸}{۵} \text{ فٹ}$$

اگر اختصار کی خاطر میز کے طول کی جگہ ہم کوئی جبریہ حرف لا لکھیں تو یہ

$$\text{مساوات ہو جائے گی } ۵ لا = ۸ \text{ فٹ یعنی } لا = \frac{۸}{۵} \text{ فٹ}$$

نوٹ۔ طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ ابھی لا مجهول مقدار تھی اور ابھی یہ معلوم مقداروں کی رقوم میں معلوم ہو گئی۔

مجهول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت مساوات کے درجہ کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات درجہ اول میں مجهول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت

ایک ہوتی ہے، مثلاً ایک مجهول مقدار کی مساوات درجہ اول $۲ لا + ۳ = ۰$

ہے اور دو مجهول مقداروں کی مساوات درجہ اول $۳ لا + ۴ لا + ۵ = ۰$

ہے۔ اسی طرح سے ایک مجهول مقدار کی مساوات درجہ دوم

$$۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ = ۰ \text{ ہے وغیرہ وغیرہ۔}$$

مساوات کے حل سے یہ مراد ہے کہ مجهول مقداروں کی قیمت

معلوم مقداروں کی رقوم میں دریافت کی جائے اور یہ قیمت ایسی

ہو کہ مساوات میں مجہول مقدار کی جگہ اس کو مندرج کرنے سے طرفین مساوات برابر ہو جائیں (یعنی مساوات پوری ہو جائے)۔

اب مساوات درجہ اول $۲ + ۳ = ۰$ کو حل کرنے سے $۲ = -۳$ ،

اس مساوات میں اگر لاکہ جائے $۲ = -۳$ لکھا جائے $\{۲ = -۳ + ۰\}$ ۔

تو مساوات پوری ہو جاتی ہے اور ظاہر ہے کہ سوائے $۲ = -۳$ کے اگر کوئی اور عدد لاکہ جائے مساوات میں رکھا جائے تو مساوات پوری نہیں ہوتی، اس کو بعض اوقات مساوات کی اصل کہتے ہیں۔

اب مساوات $۲ + ۳ + ۴ = ۰$ کو، اس میں دو مجہول مقداریں

۲ اور ۳ شامل ہیں اور مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت اس میں ایک ہے، آئندہ ہم اس کو دو مجہول مقداروں کی مساوات درجہ اول یا مختصراً خطی مساوات کہیں گے، آخر الذکر نام کی وجہ تسمیہ آگے چلکر معلوم ہوگی۔ اس مساوات کے حل سے یہ مراد ہوگی کہ مجہول مقادیر ۲، ۳ کی

قیمتیں معلوم مقداروں کی رقوم میں دریافت کی جائیں اور پھر اگر ان قیمتوں کو مساوات میں لاکہ جائے رکھا جائے تو مساوات پوری ہو جائے ان قیمتوں کے معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات کو اس صورت

میں لکھتے ہیں $۲ + ۳ = ۰$ جس میں مجہول مقدار ۲ ایک تفاعل درجہ اول

$۲ + ۳$ کے مساوی ہے اور ۲ کی مختلف قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جو قیمتیں ہوں گی وہی ۲ کی قیمتیں ہوں گی۔

پس اس مساوات کے حل معلوم کرنے کے لئے $۲ + ۳ = ۰$ میں

فرض کرو کہ $۲ = ۱$ تو $۱ + ۳ = ۰$ پس $۳ = -۱$ ایک حل ہے

” $۲ = ۱$ تو $۱ + ۳ = ۰$ پس $۳ = -۱$ ایک اور حل ہے

فرض کرو کہ لا = ۳ تو ما = $\frac{۳+۳-۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$ پس لا = ۳ ایک اور حل ہے

اور ظاہر ہے کہ یہ حل مساوات کو پورا کرتے ہیں مثلاً لا = ۱، ما = ۲ مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ $۲ \times ۱ + ۳ \times ۲ - ۲ = ۴$ اور اسی طرح اس کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ باقی سب حل مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس عمل سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم لا کو کسی مثبت، منفی صحیح عدد یا کسر کے مساوی فرض کریں اس کے جواب میں ما کی ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور لا، ما کی قیمتوں کا یہ جوڑا مساوات کو پورا کرتا ہے، پس معلوم ہوا کہ اس مساوات کے بیشمار حل ہیں، ان میں سے چند جدول ذیل میں دئے گئے ہیں۔

$$\frac{۳+۲}{۳} = ۰ \text{ یا } ۳+۲+۳ = ۰$$

.....	۳	۲	$\frac{۵}{۴}$	۱	۰	$-\frac{۳}{۴}$	۱-	۲-	لا
.....	$-\frac{۱۰}{۳}$	$-\frac{۸}{۳}$	$-\frac{۱۷}{۹}$	۲-	$-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۲}{۳}$	۰	ما

پس دو مچھول مقداروں کی مساوات درجہ اول $۲ لا + ۳ ما + ۳ = ۰$ کے حل
 $\left\{ \begin{array}{l} لا = ۲ \\ لا = ۱ \\ لا = ۰ \end{array} \right\}$ وغیرہ وغیرہ ہیں اور یہ تعداد میں بے شمار ہیں۔
 $\left\{ \begin{array}{l} ما = \frac{۴}{۳} \\ ما = \frac{۲}{۳} \\ ما = \frac{۵}{۹} \end{array} \right\}$

اب ہر ایک حل کے لا کی قیمت کو فضلہ اور ما کی قیمت کو معین مانکر ایک مستوی سطح پر بلحاظ دو ثابت محوروں کے ایک ایک نقطہ مرتسم کرو اس طرح سے مساوات کے بے شمار نقطے حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والا خط اس مساوات کی ترسیم کہلاتا ہے۔

نوٹ۔ قبل ازیں ہم نے لا، ما کو مچھول مقدار میں کہا ہے، جدول بالا سے ظاہر ہے کہ اس مساوات میں لا بتدریج مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اور ان کے

جواب میں ما کی قیمتیں متعین ہو جاتی ہیں۔ پس اس مساوات میں ہم لا، ما کو دو متغیر
مقداریں خیال کر سکتے ہیں آئندہ ایسی مساوات کو ہم دو متغیروں کی مساوات درجہ
اول بھی کہیں گے۔

پس مساوات $۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰$ یعنی $۲ لا + ۳ ما = -۴$ کی ترسیم بنانے
میں ہم لا کی کسی قیمت کو فضلہ اور ما کی متناظر قیمت کو معین فرض کر کے نقطہ
مرسم کرتے ہیں اور حسب دفعہ ۱. تفاعل۔ $۲ لا + ۳ ما = -۴$ کی ترسیم بنانے میں ہم
لا کی کسی قیمت کو فضلہ اور تفاعل۔ $۲ لا + ۳ ما = -۴$ کی متناظر قیمت کو معین فرض کر کے
نقطہ حاصل کرتے ہیں۔

پس اگر فضلہ (یعنی لا) دونوں صورتوں میں ایک ہی ہو تو ایک
صورت میں معین ما کے مساوی ہے اور دوسری صورت میں
۔ $۲ لا + ۳ ما = -۴$ کے، لیکن یہ دونوں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ایک دوسرے
کے مساوی ہیں کیونکہ $۲ لا + ۳ ما = -۴$ ۔

پس دونوں صورتوں میں اگر فضلہ مساوی ہوں تو معین بھی مساوی
ہوتے ہیں یعنی دونوں صورتوں میں تقاطع مستحصلہ وہی ہے، پس معلوم ہوا
کہ مساوات $۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰$ کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل۔ $۲ لا + ۳ ما = -۴$ کی ہے۔

عام طور پر اگر ف (لا) لا کا کوئی تفاعل ہو تو اسی طرح ہم دیکھ
سکتے ہیں کہ مساوات $۲ لا + ۳ ما = ۰$ ف (لا) کی ترسیم وہی ہے جو
تفاعل ف (لا) کی ہے کیونکہ اگر دونوں صورتوں میں لا کی ایک
ہی قیمت کو فضلہ مانا جائے تو ایک صورت میں معین ما ہوگا اور دوسری
صورت میں ف (لا) اور یہ دونوں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ

مساوی ہوتے ہیں۔
 نوٹ۔ دفعہ ۱۰ میں ہم نے تفاعل $۲ + ۳ = ۵$ کی ترسیم بنائی ہے، ظاہر ہے کہ مساوات
 $۳ + ۲ = ۵$ یعنی $۲ - ۳ = ۰$ کی ترسیم بھی وہی خط ہے جو تفاعل $۲ + ۳ = ۵$
 کی ترسیم ہے۔

۱۲۔ مختصراً ترسیم ایک ایسا مستقیم یا منحنی خط ہے جو نقطوں کے ایک
 سلسلہ میں سے کھینچا گیا ہو جن کے مقامات پہلے سے معلوم کر لئے
 گئے ہوں، بعض اوقات یہ نقطے طبعی مقادیر کو بطور فصلہ اور معین
 مرتسم کرنے سے حاصل ہو گئے، اس کی مثالیں ہمیں اگلے باب میں
 ملیں گی، فی الحال ہم ان نقطوں کے مقامات دو متغیروں کی مساوات
 درجہ اول (خطی مساوات) سے حاصل کریں گے۔
 ایسی مساوات کی مختلف عددی صورتیں یہ ہو سکتی ہیں

$$۰ = ۱۱ - ۱۱$$

$$۰ = ۹ - ۹$$

$$۰ = ۳ + ۳$$

$$۰ = ۱۰ - ۱۰$$

و غیرہ وغیرہ
 ہم آئندہ دفعات میں ان کی ترسیمیں بنائیں گے اور ان پر بالتفصیل
 بحث کریں گے۔

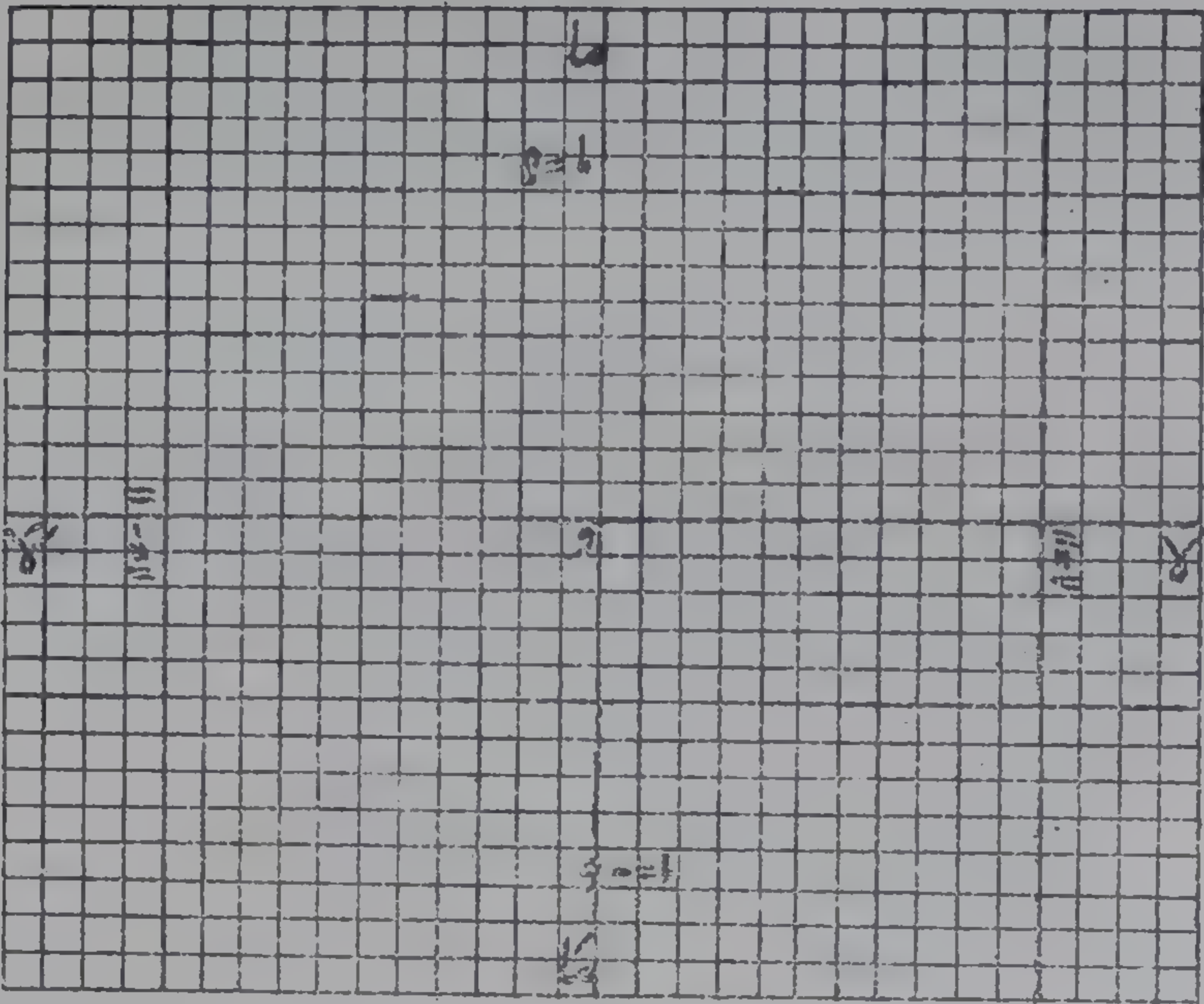
۱۳۔ $۱۱ = ۱۱$ اور $۹ = ۹$ کی ترسیمیں۔
 $۱۱ = ۱۱$ اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ $۱۱ = ۱۱ + ۰$ یا $۱۱ = ۱۱ - ۰$ یعنی یہ خطی مساوات
 کی خاص صورت ہے جس میں ۱۱ کا سر صفر ہے۔

اب اس مساوات کی ترسیم بنانے کے لئے ہمیں اسکے حل معلوم کرنے
 چاہئیں، اس مساوات کی اس شکل $۱۱ = ۱۱ + ۰$ یا $۱۱ = ۱۱ - ۰$ سے ظاہر ہے کہ ۱۱
 کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو ۱۱ کی قیمت اس کو پورا کرتی ہے۔

پس مساوات کے حل $\left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۱۱ \\ ۱۱ = ۱۱ \\ ۱۱ = ۱۱ \end{array} \right\}$ یا $\left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۱۱ \\ ۱۱ = ۱۱ \\ ۱۱ = ۱۱ \end{array} \right\}$ وغیرہ وغیرہ ہیں،

ان میں لا کی قیمت ہمیشہ ۱۱ کے مساوی ہے لیکن ما کی قیمت جو ہم چاہیں ہو سکتی ہے۔
اب حسب سابق ہر حل کے لا کو فاصلہ اور ما کو معین مان کر ہم شکل
ذیل میں نقطے مرشم کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ان کو ملائے سے ایک مستقیم
خط حاصل ہوتا ہے جو محور ما و ما کے متوازی ہے اور اس کے دائیں
جانب ۱۱ اکائیوں کے فاصلہ پر واقع ہے، طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ
مساوات کے کسی اور حل مثلاً (۱۱، -۱) سے جو نقطہ حاصل ہوتا ہے وہ بھی اسی
خط پر واقع ہے اور برعکس اس کے اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدود مساوات
کو پورا کرتے ہیں، یہ مستقیم خط مساوات لا = ۱۱ کی ترسیم ہے۔

اسی طرح لا = -۱۱ ایک ایسے مستقیم خط کی مساوات ہے جو محور ما
کے متوازی ہے اور اس سے ۱۱ اکائیاں بائیں جانب واقع ہے۔
پس عام طور پر مساوات لا = ۱ جہاں ۱ مستقل مقدار ہے ایک
ایسے مستقیم خط کو تعبیر کرتی ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے
فاصلہ ۱ پر واقع ہے، خود محور ما کی مساوات لا = ۰ ہے۔



۱۴۔ اس دفعہ میں ہم ایسی مساواتوں کی ترتیبیں معلوم کریں گے جو ذیل میں مندرج ہیں

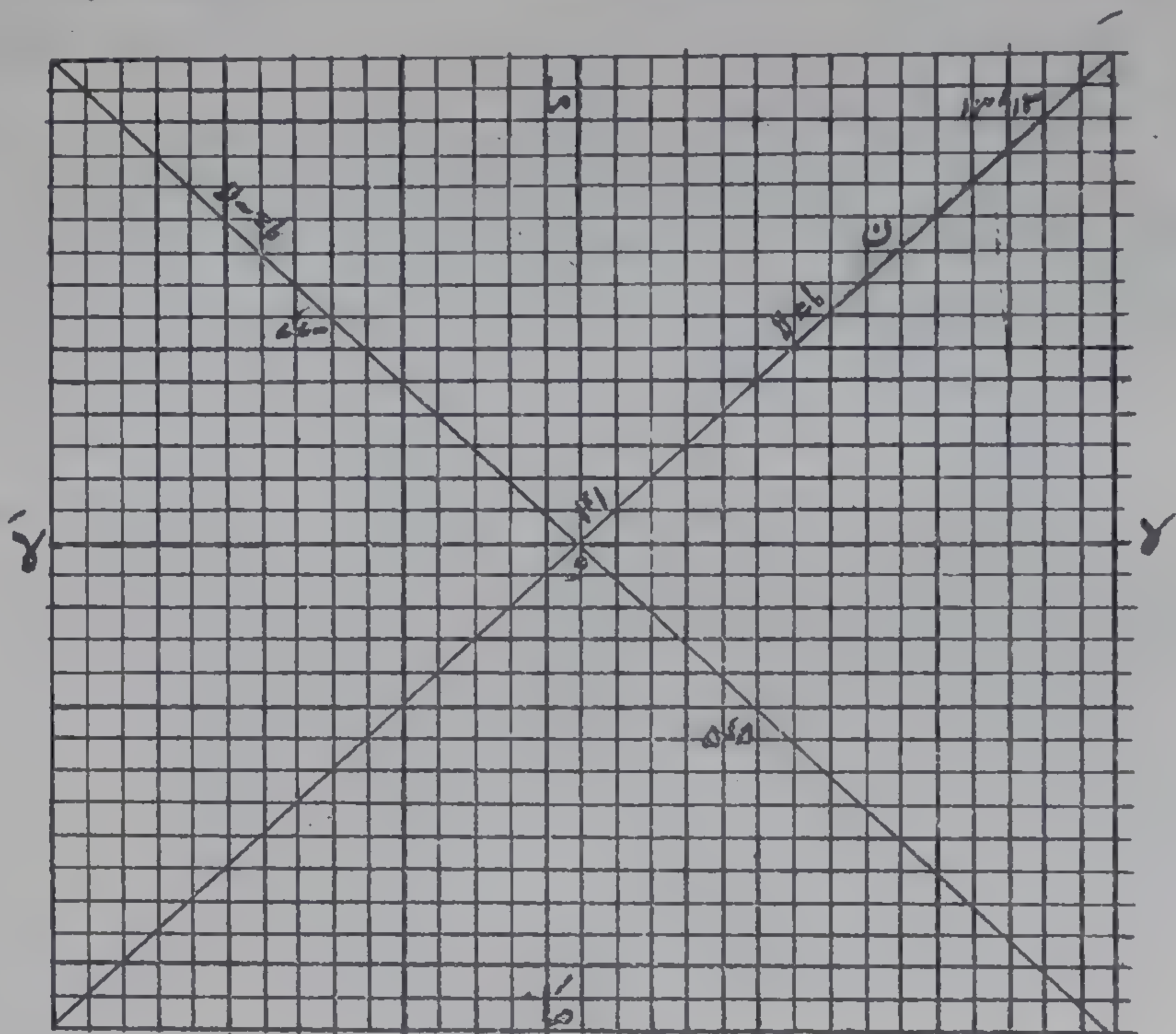
" " " " " " " " $\nabla \frac{x}{y^2} = 0$, $\nabla \frac{1}{x} = 0$, $\nabla y^3 = 0$, $\nabla x = 0$, $\nabla = 0$

(۱) مساوات $a = b$ کی ترتیب

مناسب ہو گا کہ کسی مساوات کی ترسیم بناتے وقت طالب علم لا اور ما کی قیمتوں کو ایک جدول کی شکل میں اس طرح لکھ دے۔

.....	12	5	1	.	2-	6-	= 11
.....	12	5	1	.	2-	6-	= 1

اگر مساوات $a =$ لایں لاکھ کوئی اور قیمت مثلاً $-n$ فرض کریں تو اس کے



1 = 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

جواب میں ما کی قیمت - ۸ حاصل ہوتی ہے یعنی اس مساوات سے لا، ما کی قیمتوں کا ایک اور زوج یعنی ایک اور نقطہ (۸-۸) حاصل ہوتا ہے، اس کو مرتسم کرنے پر معلوم ہوگا کہ یہ بھی اسی مستقیم خط پر واقع ہے، اسی طرح ہر ایک نقطہ جو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے اسی مستقیم خط پر واقع ہے، اس کے باہر کہیں واقع نہیں ہو سکتا۔ پس اس مساوات کی ترسیم یہ مستقیم خط ہے جو مبدا سے گزرتا ہے اور ربعات اول اور سوم کی تنصیف کرتا ہے، یعنی اس کے اوپر کی سمت محور لا کی مثبت سمت سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ اب اس خط پر کوئی نقطہ ن، لو، اس کے محدود (۹، ۹) معلوم کرو یہ محدود مساوات ما = لا کو پورا کرتے ہیں، اسی طرح اس خط پر کسی نقطہ کے محدود اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ پس مساوات سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ سب کے سب اس خط پر واقع ہیں اور اس خط پر کے سب نقطے مساوات کو پورا کرتے ہیں، یعنی اس مساوات کی ترسیم یہ مستقیم خط ہے اور اس خط کی مساوات ما = لا ہے، پس اس خط کا جبر یہ نام ہم ما = لا رکھ سکتے ہیں۔ مساوات ما = لا کی ترسیم بھی اسی طرح حاصل ہو سکتی ہے، مساوات ما = لا میں لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما کی جو متناظر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

لا =	۳	۵	۴-	۷-
ما =	۳-	۵-	۴	۷

نقاط (۰، ۰)، (۲، ۲) وغیرہ کو شکل صفحہ ۴۲ میں مرتسم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سب کے سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گزرتا ہے اور ربعات دوم و چہارم کی تنصیف کرتا ہے، پس مساوات

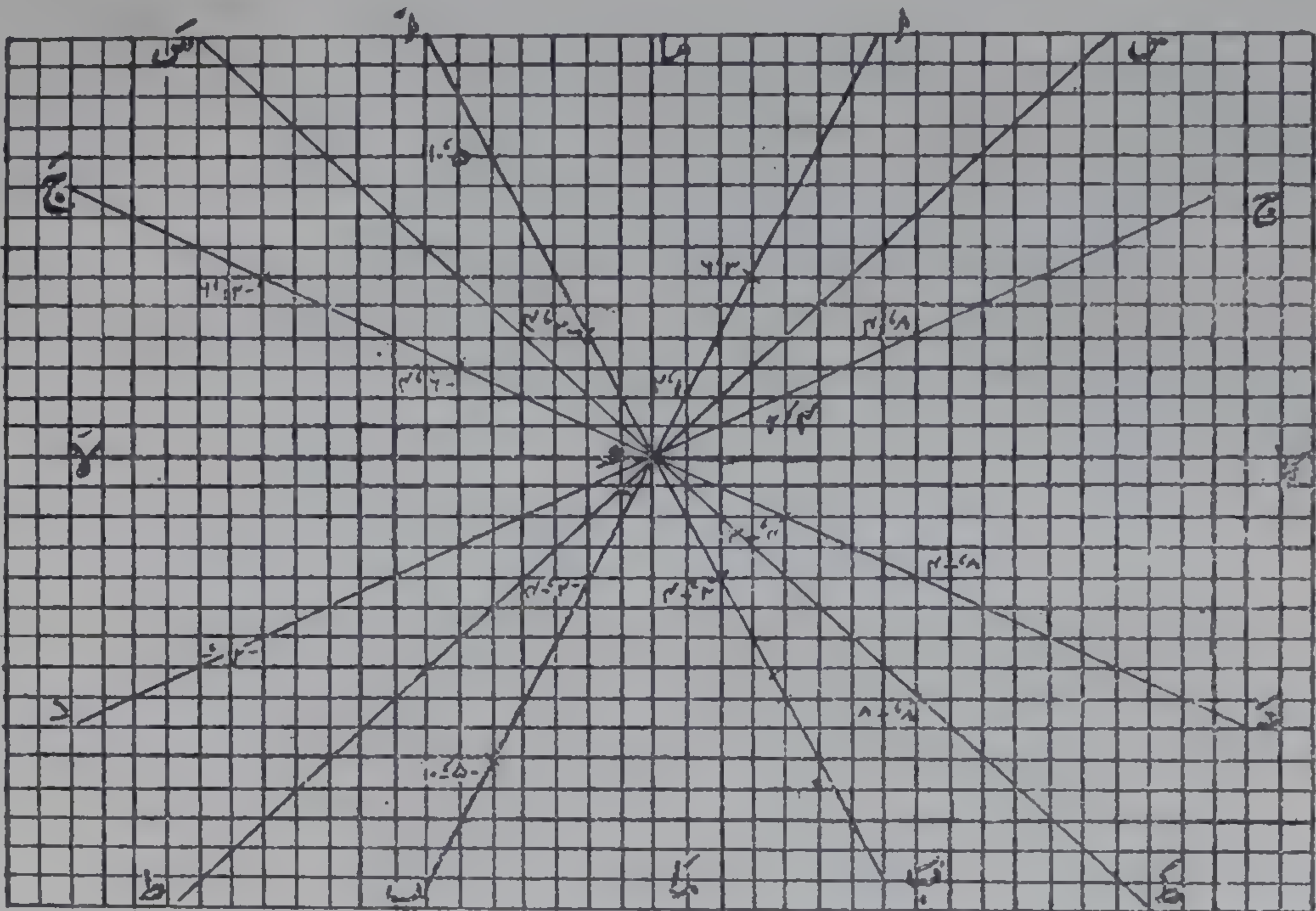
ما = لا کی ترسیم یہ خط ہے اور اس خط کا جبریہ نام ما = لا ہے۔

(ب) مساوات ما = لا کی ترسیم

اس مساوات میں لا کو مثبت، منفی قیمتیں دینے سے ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان کو جدول کی صورت میں لکھو۔

.....	۵ -	۲ -	۷	۳	۱	۰	لا =
.....	۱۰ -	۴ -	۱۳	۶	۲	۰	ما =

حسب معمول ان نقطوں (۰، ۰)، (۱، ۲)، (۳، ۷) وغیرہ کو مرسم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سب کے سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے اور ربات اول و سوم میں واقع ہے۔



ما = لا کے ساتھ کی مساوات ما = لا ہے، اس کی ترسیم بنانے کے لئے جدول فریل ہے

.....	۵-	۲-	۴	۲	۰ = لا
.....	۱۰	۴+	۸-	۴-	۰ = ما

ان نقطوں (۲، ۴) (۴، ۸) وغیرہ کو مرتسم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ان کو ملانے والا خط بھی مستقیم ہے، مبادئیں سے گزرتا ہے اور رجات دوم و چہارم میں واقع ہے، پس یہ خط اس مساوات کی ترسیم ہے دیکھو شکل صفحہ ۴۴۔

شکل سے معلوم ہوگا کہ $۲ = لا$ کی ترسیم کا زاویہ میلان محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ برابر ہے اس زاویہ کے جو $ما = ۲ - لا$ کی ترسیم محور لا کی منفی سمت کے ساتھ بنائی ہے، یعنی $اولا = لا$ اور $اولا = لا$

اور $اولا = لا$ اور $ما = ۲ - لا$ کی ترسیمیں محور ما کی متقابل جانبوں میں اسے مساوی زاویے بناتی ہیں۔

یا مختصراً محور ما میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے،

شکل صفحہ ۴۴ میں $\begin{cases} ۰ = لا - ما \\ ۰ = لا + ما \end{cases}$ کی ترسیمیں بنائی گئی ہیں

یہ مساواتیں اس طرح $ما = \frac{۱}{۲} لا$ لکھی جاسکتی ہیں جہاں ما کا سر ایک ہے اور $ما = -\frac{۱}{۲} لا$

یہ اکیلا مساوات کے ایک طرف ہے، یہ مساوات کی معیاری صورت ہے۔ ان مساواتوں کی متعلقہ جدولیں یہ ہیں۔

$$ما = \frac{۱}{۲} لا$$

$$ما = -\frac{۱}{۲} لا$$

.....	۶-	۸	۴	۰ = لا
.....	۳	۴-	۲-	۰ = ما

.....	۱۲-	۸	۴	۰ = لا
.....	۶-	۴	۲	۰ = ما

ان نقطوں کو شکل میں مرتب کیا گیا ہے، ان کو ملانے والے خط مستقیم ہیں اور مبداء میں سے گزرتے ہیں۔

طالب علم شکل سے دیکھے کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا کی ترسیم کا زاویہ میلان محور لا کی مثبت سمت (دکلا) کے ساتھ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا کی ترسیم کے زاویہ میلان سے کم ہے اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا کا زاویہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا کے زاویہ سے کم ہے یعنی زاویہ جولا \angle زاویہ \angle و \angle اول

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جیسے لا کا سر تعداد بڑھتا ہے خط کا زاویہ میلان بھی بڑھتا جاتا ہے اور ترسیم خط ربع اول میں زیادہ اونچا ہوتا جائے، اسی طرح مساواتوں

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ لا } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ لا } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ لا}$$

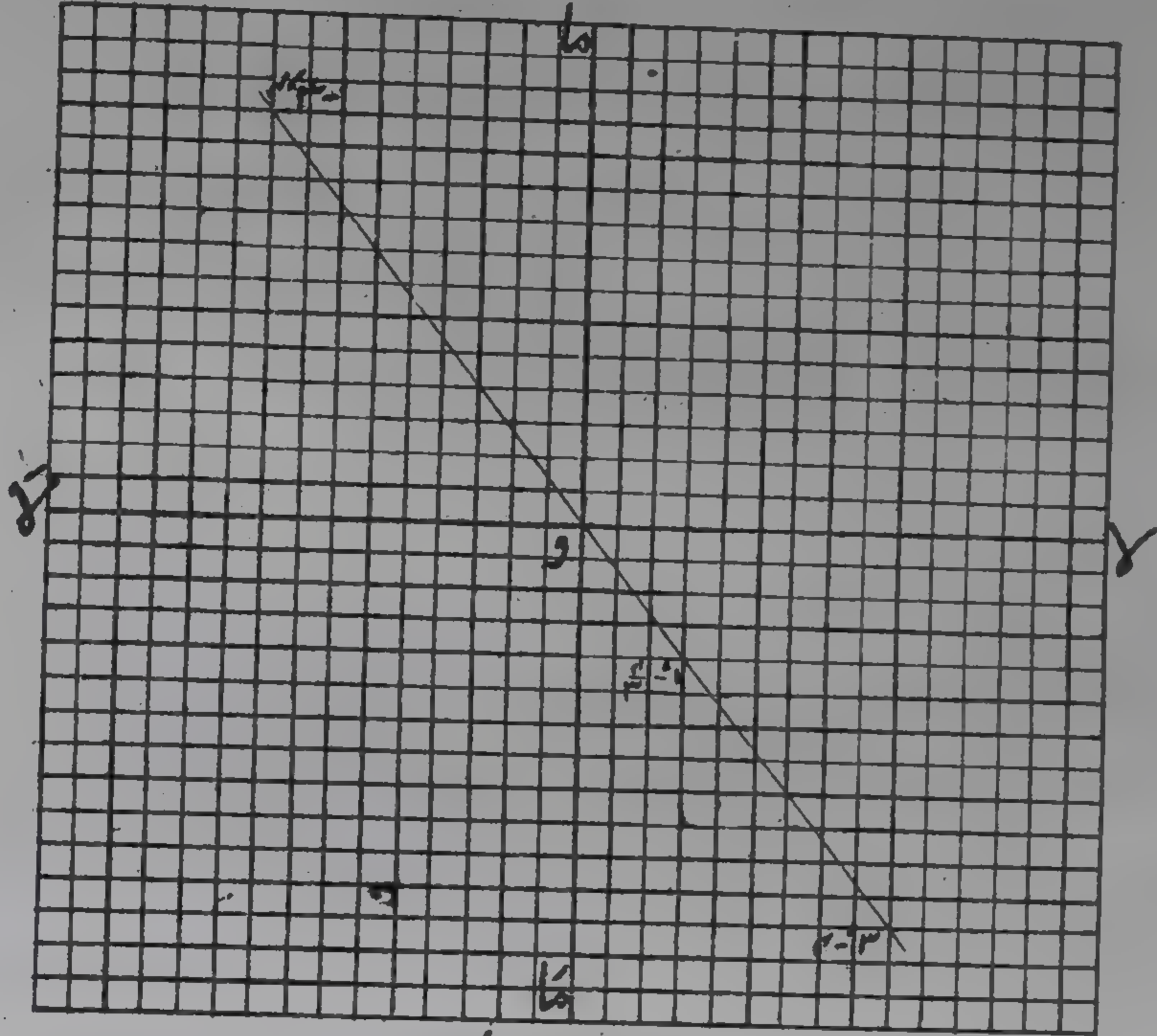
کی ترسیموں کے مشابہہ سے معلوم ہوگا کہ جیسے لا کا سر تعداد بڑھتا جاتا ہے ترسیموں کے زوایا میلان محور لا کی منفی سمت (دکلا) کے ساتھ بالترتیب بڑھتے جاتے ہیں اور ترسیمیں ربع دوم میں اونچی ہوتی جاتی ہیں (ج) مساوات $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا کی ترسیم مناسب پیمانہ کے انتخاب کی خاطر ہم اس مثال کو حل کرتے ہیں، اس مساوات کی معیاری صورت $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا ہے اور لا، لا کی متناظر قیمتوں کی جدول یہ ہوگی۔

$$1 = \frac{1}{2} \text{ لا}$$

.....	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	1	لا
.....	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	لا

اب تک ہم نے چھوٹے حصہ کو اکائی مانا ہے، لیکن موجودہ صورت میں ہمیں ایسے طول ناپنے پڑیں گے جن کے شب نماؤں میں 3 واقع ہوتا ہے جیسے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ وغیرہ وغیرہ، اس لئے اگر ہم تین چھوٹے حصوں کو اکائی مانیں یعنی $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ چھوٹے حصے = 1 تو چھوٹا حصہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کے مساوی ہوگا، پس $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کے

لئے ہیں منفی سمت میں ۴ چھوٹے حصے جانا پڑے گا اور ۳ کے لئے مثبت سمت میں ۸ چھوٹے حصے، اس پیمانہ پر شکل ذیل بنائی گئی ہے



پیمانہ ۳ و ۴ = ۱

پس مساوات $۳-۴ = ۰$ لاکھ کی ترسیم سبدا میں سے گزرنے والا ایک خط ہے جو ربات دوم و چہارم میں واقع ہے اور $۴ = ۰$ لاکھ کے ترسیمی خط سے اونچا ہے۔
مساوات $۳ = ۴$ لاکھ کی ترسیم اوپر کے خط کا عکس ہوگی محور ما میں اور اس پر یہ نقطے واقع ہو
(۱، ۴) (۲، ۳) (۳، ۲) (۴، ۱) وغیرہ وغیرہ۔

نوٹ۔ نقطہ (۳، ۴) کا عکس محور ما میں نقطہ (۴، ۳) ہوگا۔

اور اسی نقطہ کا عکس محور لا میں (۳، ۱) ہوگا اور پر کے نقطے خط $۳ = ۴$ لاکھ کے نقطوں میں فصلوں کی علامات بدلنے سے حاصل کئے گئے ہیں۔

۱۵۔ دفعہ آخر میں ہم نے ان مساواتوں

$$\begin{cases} ۳ = ۴ \\ ۳ = ۴ \\ ۳ = ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} ۳ = ۴ \\ ۳ = ۴ \\ ۳ = ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} ۳ = ۴ \\ ۳ = ۴ \\ ۳ = ۴ \end{cases}$$

کو مرسم کیا۔ ان میں سے ہر ایک دو متغیروں کی مساوات درجہ اول ہے

عام مستقل ما = م لا ہے ۔
 اوپر ہم نے کہا ہے کہ م ایک مستقل مقدار ہے، واضح ہو کہ
 م کسی ایک مساوات اور اس کی ترسیم کے لئے مستقل ہے، مثلاً فرض کیا
 کہ $M = \frac{1}{P}$ تو مساوات ما = $\frac{1}{P}$ لا حاصل ہوتی ہے، اس کی ترسیم بناتے
 وقت لا اور ما بدلتے ہیں مگر م کی قیمت $\frac{1}{P}$ اس مساوات کی ترسیم بناتے
 وقت نہیں بدلتی۔ لیکن مختلف ترسیمیں حاصل کرنے کے لئے م کی قیمت
 بدلتی ہے، مثلاً اگر م کی قیمت $\frac{1}{P}$ ہو تو ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے، اگر $\frac{1}{2P}$
 ہو تو دوسری، وغیرہ وغیرہ۔

اب ظاہر ہے کہ مساوات
 $m = m$ میں m کی بے شمار عددی
 قیمتوں کے جواب میں مبدأ میں
 سے گزرنے والے بے شمار
 خط حاصل ہوتے ہیں، ان میں
 سے چند ساعت کی شکل میں دکھائے
 گئے ہیں۔

اجالی طور یہ ہم مساوات

ما = م لا اور اس کی ہندسی تعبیر کے باہمی تعلقات کو ذیل میں درج کرتے ہیں

ہندی تعمیر

جیمز رابٹ

۱۔ م لا دو متغیروں کی مساوات درجہ اولیٰ ہے ہر صورت میں اس کی ترکیب مستقیم خط ہے

مساوات $ما = م لا$ کے بے شمار حل ہیں
مساوات $ما = م لا$ میں رقم مطلق
موجود نہیں
مساوات $ما = م لا$ میں م مثبت
ہے مثلاً $(\frac{1}{2})$

اس کی ترسیم پر بے شمار نقطے ہیں۔
اس کی ترسیم ہمیشہ مبداء میں سے
گزرتی ہے۔
اس کی ترسیم ربعات اول اور سوم
میں واقع ہوتی ہے یعنی محور لا کی
مثبت سمت ولا کے ساتھ حادہ
زاویہ بناتی ہے۔

مساوات $ما = م لا$ میں م منفی ہے
مثلاً $(-\frac{1}{2})$

اس کی ترسیم ربعات دوم و چہارم
میں واقع ہوتی ہے یعنی محور لا
کی منفی سمت ولا کے ساتھ حادہ
زاویہ بناتی ہے۔

اگر مساوات $ما = م لا$ میں م مثبت
ہو اور اس کی عددی قیمت بڑھتی
جائے

تو اس کی ترسیم کا زاویہ میلان ولا
کے ساتھ بڑھتا جاتا ہے۔

اگر مساوات $ما = م لا$ میں م منفی
ہو اور اس کی عددی قیمت بڑھتی
جائے

تو اس کی ترسیم کا زاویہ میلان ولا
کے ساتھ بڑھتا جاتا ہے۔

ان کی ترسیمیں محور ما میں ایک
دوسرے کا عکس ہیں۔

مساوات $ما = م لا$ اور $ما = - م لا$
کے سر مساوی اور مختلف علامت ہیں

۱۶۔ اب ہم دو متغیروں کی ایسی مساوات درجہ اول کی ترسیم معلوم
کرتے ہیں جس میں مطلق یا مستقل رقم موجود ہو

ایسی چند مساواتیں یہ ہیں

$$\begin{cases} ۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰ \\ ۲ ما - ۳ لا - ۱۰ = ۰ \\ ۵ ما - ۳ لا + ۴ = ۰ \end{cases} \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

اور یہ بالترتیب اس طرح لکھی جاسکتی ہیں $ما = ۲ لا + ۵$ $ما = ۳ لا - ۲$ وغیرہ وغیرہ

یعنی ما اکیلا ایک طرف ہے اور لا (مع اپنے سر کے) اور مستقل رقم دوسری طرف، یہ مساوات کی معیاری صورت ہے۔
اگر بموجب سابق لا کے سر کو م سے تعبیر کریں اور مستقل رقم کو ج سے تو اوپر کی ہر مساوات اور اس طرح کی اور سب مساواتیں اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں

$$ما = م لا + ج$$

اب ہم ایسی مساواتوں کی ترسیمیں معلوم کرتے ہیں۔

$$(۱) ما - ۲ لا - ۱۰ = ۰ \text{ کی ترسیم}$$

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $ما - ۲ لا = ۱۰$ یا $ما = ۲ لا + ۱۰$ جو معیاری صورت ہے۔

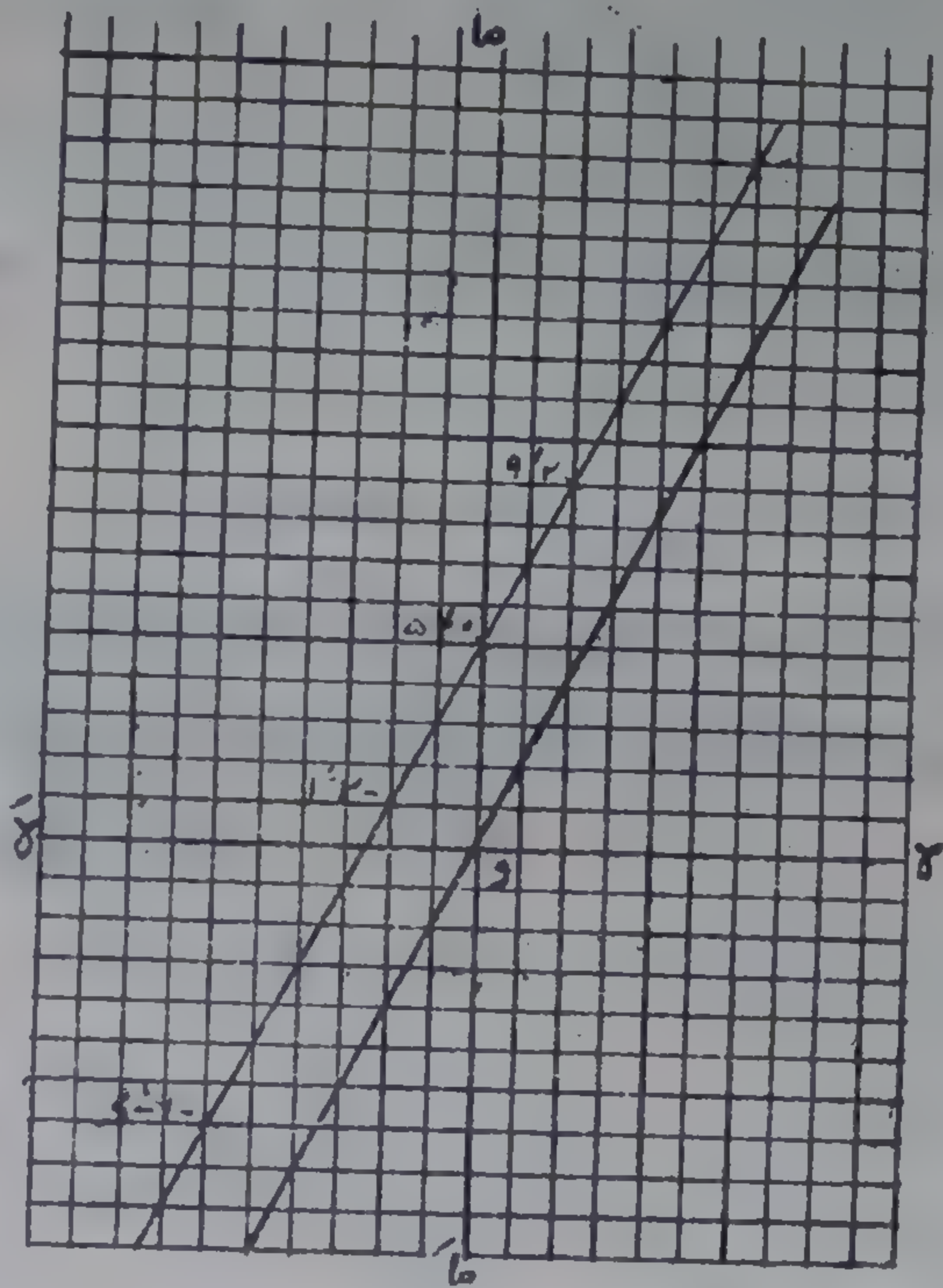
مساوات $ما = ۲ لا + ۵$ کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل $۲ لا + ۵$ کی کیونکہ لا کی مختلف قیمتوں کے لئے ما اور تفاعل $۲ لا + ۵$ کی قیمتیں مساوی ہیں لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما کی قیمتیں نکالو اور ان سے جدول مرتب کرو

$$ما = ۲ لا + ۵$$

.....	۶ -	۲ -	۴	۲	۰	=	لا
.....	۷ -	۱	۱۳	۹	۵	=	تفاعل $۲ لا + ۵$

نقاط (۵، ۰)، (۹، ۲)، (۱۳، ۴) وغیرہ کو مرسم کرو، ان نقطوں کو ملانے والا

خط ایک مستقیم خط ہے، کوئی اور نقطہ جو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے مثلاً (۱، ۳) اس خط پر واقع ہے، طالب علم کوئی نقطہ اس خط پر لئے اس کے محدود معلوم کرے اور دیکھے کہ یہ مساوات $۲ = ۵ + لا$ کو پورا کرتے ہیں۔ پس یہ مستقیم خط مساوات $۲ = ۵ + لا$ کی ترسیم ہے، دیکھو شکل۔ یہ خط مبدأ میں



سے نہیں گزرتا اور یہ مساوات سے ظاہر ہے، کیونکہ مبدأ کے محدود (۰، ۰) مساوات $۲ = ۵ + لا$ کو پورا نہیں کرتے (۰ = ۵ + ۰ × ۲ = ۵) مستقل رقم مانع ہے

مساوات $۲ = ۵ + لا$ میں اگر تھوڑی دیر کے لئے مستقل رقم سے قطع نظر کریں تو مساوات $۲ = ۵ + لا$ رہ جاتی ہے، شکل بالائیں اس

مساوات $۲ = ۵ + لا$ کی ترسیم بھی بنائی گئی ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$۲ = ۵ + لا$ کی ترسیم $۲ = ۵ + لا$ کی ترسیم کے متوازی

ہے، یعنی یہ ترسیمیں محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ مساوی زاویے بناتی ہیں جو مساوی ہونے کے علاوہ دونوں حادثے ہیں، طالب علم اسے بالعموم درست پائے گا کہ اگر معیاری صورت میں لا کا سر مثبت ہو تو ترسیم محور لا کی مثبت سمت و لا کے ساتھ زاویہ بنائیگی اور اگر لا کا سر منفی ہو تو ترسیم محور لا کی منفی سمت و لا کے ساتھ حادثہ زاویہ بنائے گی۔

مساوات $۲ = ۵ + ۵$ میں جو لا کا سر ہے یعنی ۱۲ اس کو ہم نے کچھ
 معنی پہناتے کیونکہ ہم نے دیکھا کہ $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم متوازی ہیں
 یعنی معیاری صورت میں لا کا سر ترسیم کے میلان کو ظاہر کرتا ہے۔
 اب ہم مستقل رقم ۵ کی تعبیر معلوم کرتے ہیں، دیکھنے سے معلوم ہو گا
 $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم محور ما کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتی ہے جس کا فاصلہ
 مبدأ سے اوپر ۵ اکائیوں کے مساوی ہے۔

پس مساوات $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم ہم اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں۔
 (۱) مساوات $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم بناؤ، مبدأ سے ۵ اکائیاں اوپر محور ما
 پر ایک نقطہ ثابت کرو، اس کے محدود (۵، ۰) ہیں، اس نقطہ میں سے ایک مستقیم
 خط کھینچو جو $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم کے متوازی ہو، یہ خط مساوات $۲ = ۵ + ۵$
 کی ترسیم ہو گا۔

(۲) چونکہ $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم کا ہر معین $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم کے متناظر
 معین سے بقدر ۵ کے بڑا ہے اس لئے ترسیم مطلوبہ اس طرح بھی حاصل ہو سکتی
 ہے، $۲ = ۵ + ۵$ کی ترسیم بناؤ اس کے ہر معین کو بقدر ۵ اکائیوں کے اوپر کی
 طرف خارج کرو جو نقطے اس طرح سے ملیں ان کو لانے والا خط $۲ = ۵ + ۵$
 کی ترسیم ہے۔

ان دو ضروری امور کی مزید توضیح کے لئے کہ مساوات $۲ = ۵ + ۵$ میں
 (۱) لا کا سر ۲ ترسیم کے میلان کو ظاہر کرتا ہے اور (ب) ترسیم محور ما کو مبدأ
 سے ۵ اکائیاں اوپر قطع کرتی ہے، ہم اس قسم کی دو اور مثالیں حل کریں گے۔

(ب) مساوات $۵ = ۳ + ۳$ کی ترسیم۔ سب سے پہلے

اس مساوات کو $۵ = ۳ + ۳$ کی صورت میں لکھو یعنی

$$۵ = ۳ + ۳ \quad (۱)$$

بوجب سابق اس مساوات کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل $\frac{۳}{۵} - \frac{۴}{۵}$ کی۔
 مناسب پیمانہ کے انتخاب کے لئے مساوات (۱) اس طرح بھی
 لکھی جاسکتی ہے $۰.۵۸ - ۰.۵۶ = ۰.۰۲$
 ظاہر ہے کہ

$$\frac{۳}{۵} - \frac{۴}{۵} = ۰.۰۲$$

.....	۱ -	۲	۱	۰	لا
.....	$\frac{۴}{۵} -$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵} -$	$\frac{۳}{۵} -$	ما

ایچوں (یا سنتی میٹروں) والے کاغذ میں او کو چھوٹے حصہ کے مساوی
 فرض کرنا مناسب ہوگا، اس صورت میں اکائی ایک اینج (یا ایک سنتی میٹر)
 کے مساوی ہوگی یا چونکہ عددوں کے نسب نماؤں میں ۵ واقع ہوتا
 ہے ہم اینج والے کاغذ میں ۵ چھوٹے حصوں کو ایک اکائی کے مساوی
 فرض کرتے ہیں یعنی چھوٹا حصہ $= \frac{۱}{۵}$ ، ۰.۰۲ ، ہم اس آخری پیمانہ کو
 اختیار کریں گے شکل ذیل میں جدول کے نقطوں کو مرسم کرنے سے

مساوات $ما = \frac{۳}{۵} - \frac{۴}{۵}$ کی ترسیم بنائی گئی ہے اس مساوات میں
 مستقل رقم $-\frac{۴}{۵}$ ہے اور اس کی ترسیم واقعی محور ما کو مبدأ سے $-\frac{۴}{۵}$

اکائیاں نیچے کاٹتی ہے نیز $ما = \frac{۳}{۵} - \frac{۴}{۵}$ کی ترسیم $ما = \frac{۳}{۵} - \frac{۴}{۵}$ لا کی ترسیم

کے متوازی ہے اور یہ دونوں ترسیمیں و لا سے مساوی اور حاوے
 زاویے بناتی ہیں اور ہونا بھی چاہیے کیونکہ لا کا سر دونوں مساواتوں
 میں ایک ہی مثبت مقدار کے مساوی ہے

اب مساوات $ما = \frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵}$ (۲) کی ترسیم بھی

$$ما = \frac{۳}{۵} لا$$

کی ترسیم کے

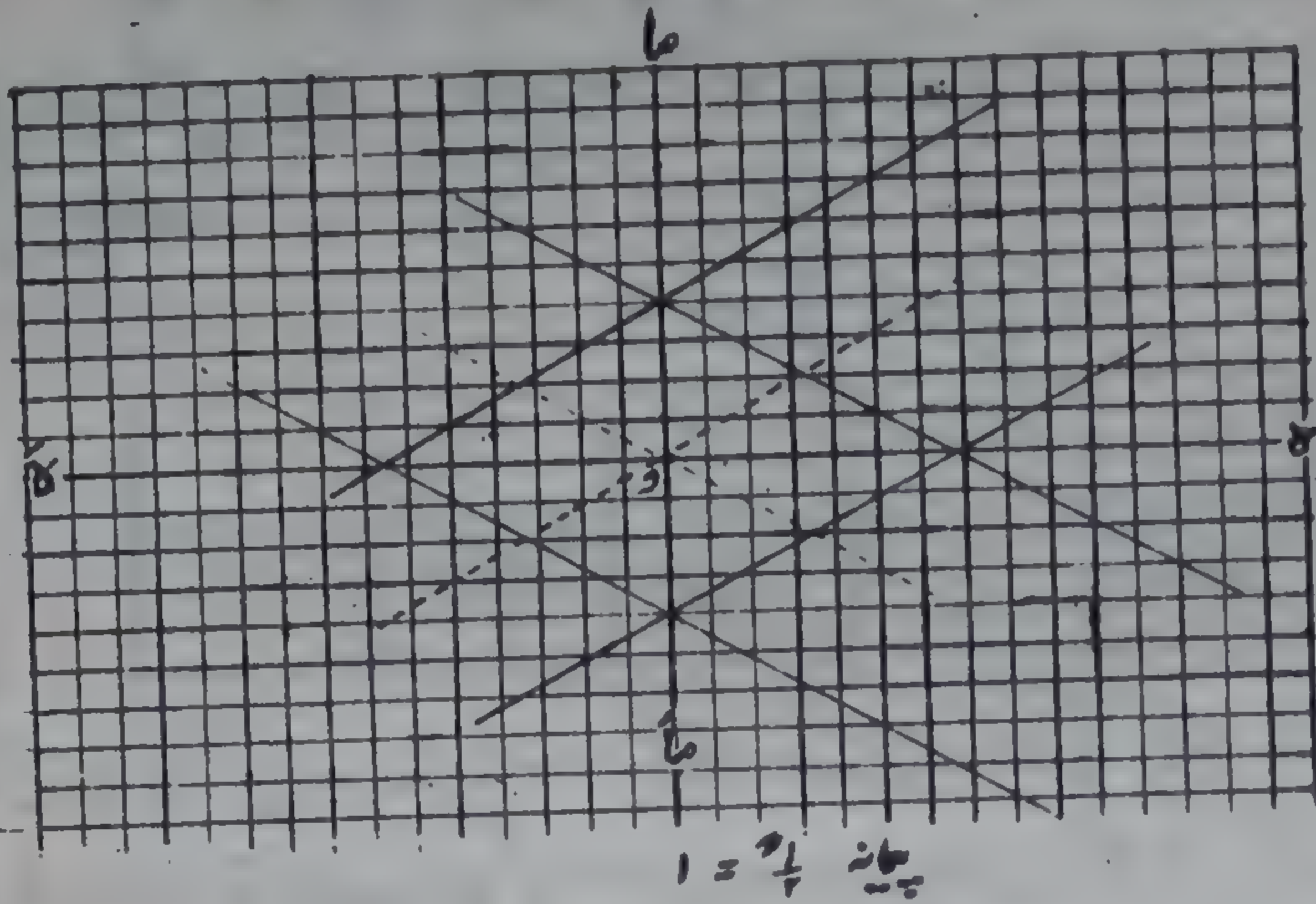
متوازی ہوگی

مگر محور ما کو

مبدأ سے $\frac{۳}{۵}$

اکائیوں اوپر

قطع کرے گی،



اس کی تصدیق کے لئے دیکھو جدول ذیل اور مساوات کی ترسیم

$$ما = \frac{۳}{۵} لا + \frac{۲}{۵}$$

لا	۰	۱	۱ -
ما	۵۸	۱۶۴	۵۲

اب لا کے سر کی علامت بدلنے سے مساوات کی دو نئی صورتیں

$$\left. \begin{aligned} ما &= -\frac{۳}{۵} لا - \frac{۲}{۵} \quad (۱۳) \\ ما &= -\frac{۳}{۵} لا + \frac{۲}{۵} \quad (۱۴) \end{aligned} \right\} \text{ پیدا ہوتی ہیں یعنی}$$

ان مساواتوں کے لئے ذیل کی جدولیں مرتب کی گئی ہیں اور ان کی ترسیمیں شکل میں بنائی گئی ہیں۔

$$ما = -\frac{۳}{۵} لا + \frac{۲}{۵}$$

$$ما = -\frac{۳}{۵} لا - \frac{۲}{۵}$$

لا	۰	۱	۱ -
ما	۵۸	۵۲	۱۶۴

لا	۰	۱	۱ -
ما	۵۸ -	۱۶۴ -	۵۲ -

ان مساواتوں کی ترسیمیں باہم متوازی ہیں اور ولا کی مثبت سمت کے ساتھ مساوی اور منفرد جے زاویے بناتی ہیں، نیز (۳) کی ترسیم محور ما کو مبداء سے $\frac{۳}{۵}$ اکائیاں نیچے قطع کرتی ہے اور (۴) کی ترسیم $\frac{۲}{۵}$ اکائیاں اوپر

طالب علم شکل سے دیکھے کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{۳}{۵} - لا = \frac{۲}{۵} \\ \frac{۲}{۵} - لا = \frac{۳}{۵} \end{array} \right.$$

کی ترسیمیں محور ما پر کے

ایک ہی نقطہ (۰، $\frac{۲}{۵}$) میں سے گزرتی ہیں اور محور ما میں ایک ترسیم دوسری

کا عکس ہے، اسی طرح

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{۳}{۵} + لا = \frac{۲}{۵} \\ \frac{۲}{۵} + لا = \frac{۳}{۵} \end{array} \right.$$

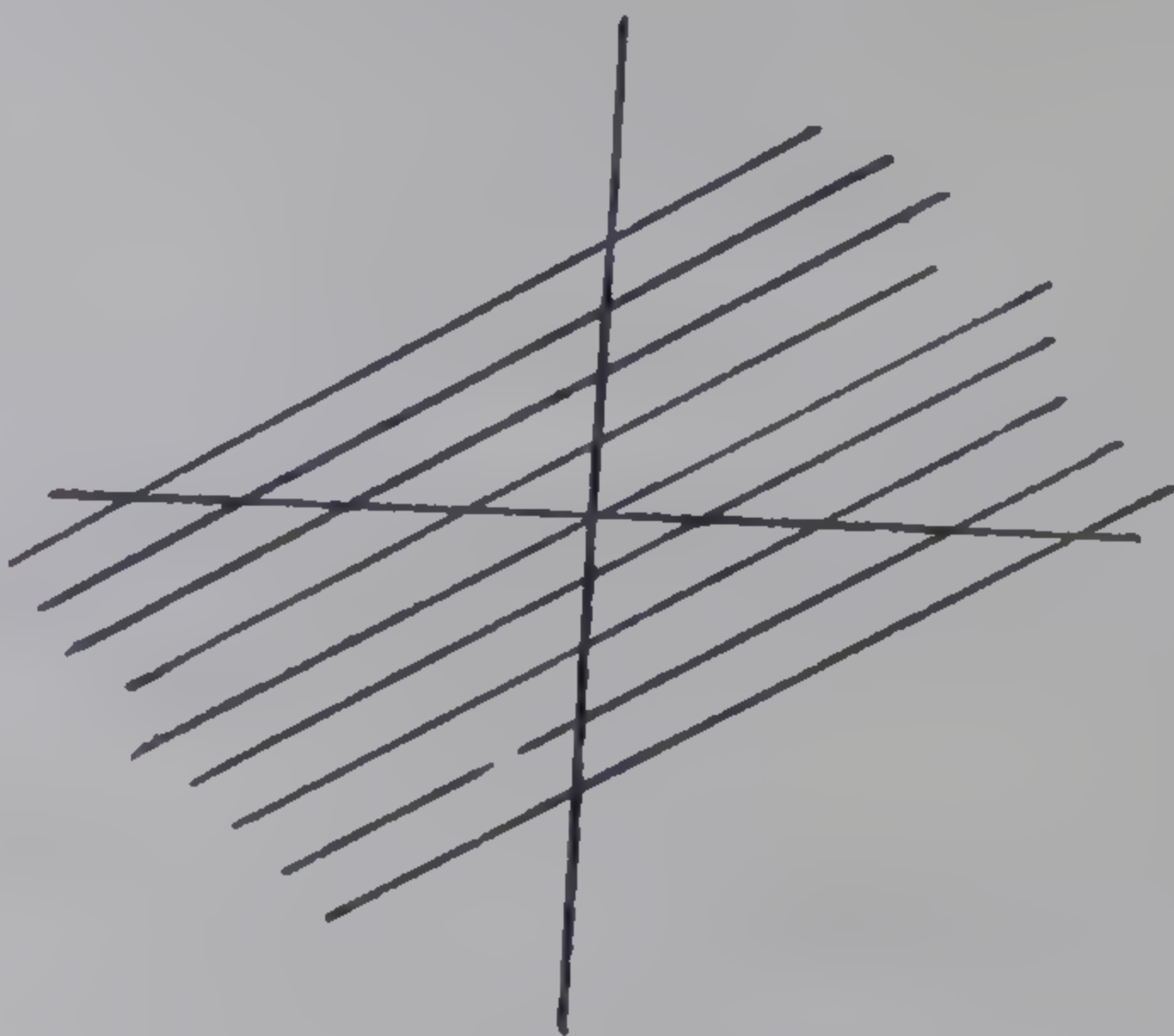
کی ترسیمیں محور ما کے ایک

ہی نقطہ (۰، $\frac{۳}{۵}$) میں سے گزرتی ہیں اور اس محور میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے۔

اٹنائے غل میں ہم نے دیکھا کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{۳}{۵} + لا = \frac{۲}{۵} \\ \frac{۲}{۵} - لا = \frac{۳}{۵} \end{array} \right.$$

کی ترسیمیں ایک دوسرے کے

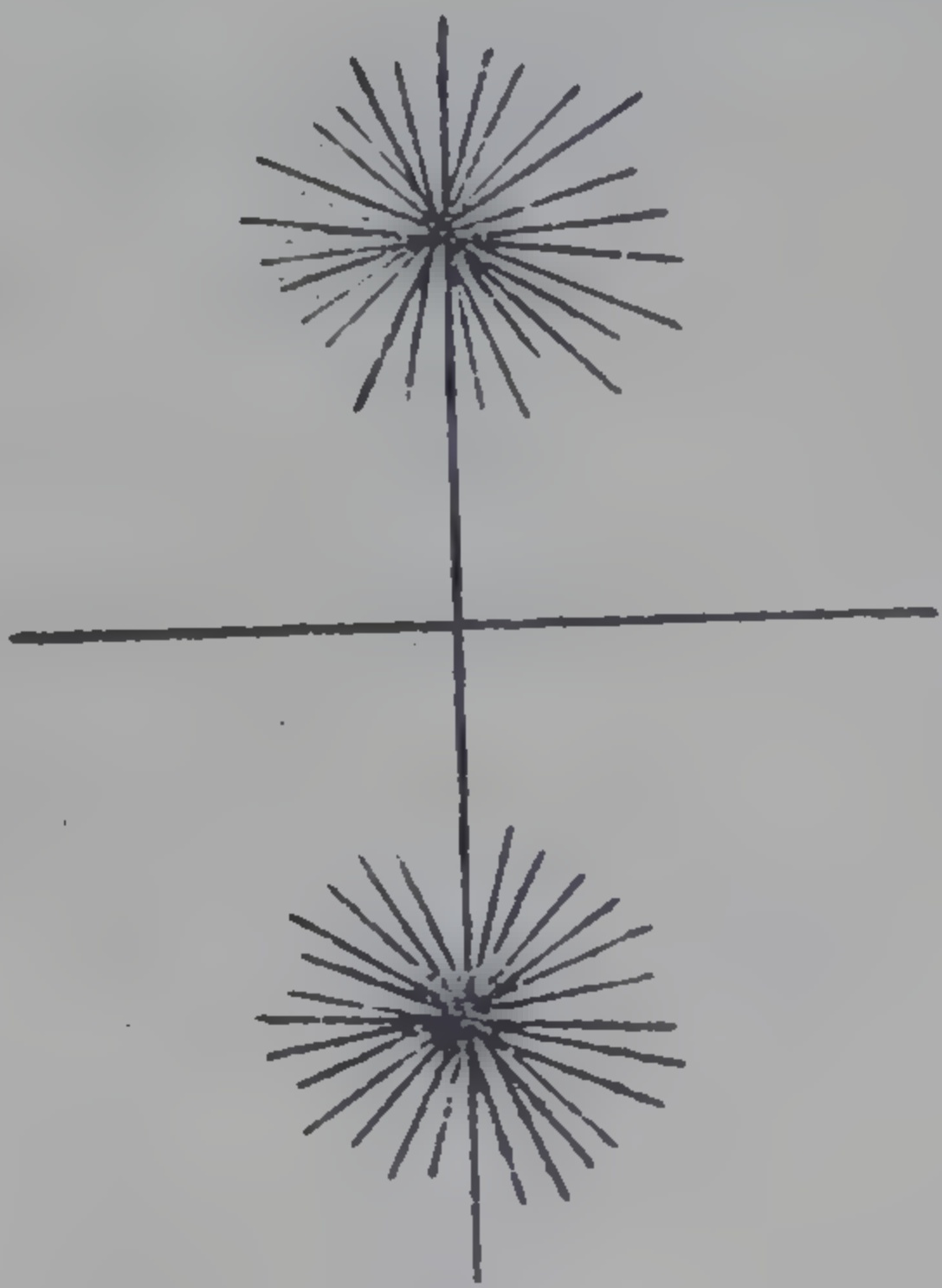


متوازی ہیں، ان میں سے ہر مساوات کی ترسیم $ما = \frac{۳}{۵} لا$ کی ترسیم کے متوازی ہے اور دراصل اگر اس قسم کی کوئی مساوات لی جائے جس میں مستقل رقم خواہ کچھ ہی ہو لیکن اس میں لا کا سر $ما = \frac{۳}{۵} لا$ ہو تو اس کی ترسیم لازماً $ما = \frac{۳}{۵} لا$ کی ترسیم کے متوازی ہوگی، مثلاً یہ مساواتیں $ما = \frac{۳}{۵} لا + ۱$ اور

ما = $\frac{3}{4}$ لا $\pm \frac{1}{4}$ وغیرہ وغیرہ اور بالعموم وہ بے شمار مساواتیں جو ما = $\frac{3}{4}$ لا $\pm \frac{1}{4}$ ج میں ج کو مختلف مثبت، منفی قیمتیں دینے سے حاصل ہو سکتی ہیں ان سب کی تزییمیں ایک دوسرے کے اور مساوات ما = $\frac{3}{4}$ لا کی تزییم کے متوازی ہیں یعنی ولا کے ساتھ مساوی حادثے زاویے بناتی ہیں۔ ج کی مختلف قیمتوں سے محور ما پر کے ان نقطوں کا فاصلہ مبداء سے معلوم ہوتا ہے جن میں سے یہ متوازی خطا گزرتے ہیں۔

اب ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ مساوات ما = $\frac{3}{4}$ لا $\pm \frac{1}{4}$ میں مستقل رقم دہی رہتی ہے اور لا کاسر (یعنی خط کا میلان) بدلتا ہے، اس طرح مساواتیں حاصل ہونگی جیسے ما = $\frac{3}{4}$ لا $\pm \frac{1}{4}$ ، ما = $\frac{3}{4}$ لا $\pm \frac{1}{4}$ وغیرہ وغیرہ اور یہ سب کی سب بے شمار مساواتیں ما = م لا $\pm \frac{1}{4}$ میں م کو مختلف مثبت، منفی قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں۔ اب م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو مساوات ما = م لا $\pm \frac{1}{4}$ کی تزییم محور ما کو مبداء سے $\frac{1}{4}$ اکائیاں اوپر کاٹتی ہے یعنی ہمیشہ ثابت نقطہ (۰، $\frac{1}{4}$) میں سے گزرتی ہے اور ہمیشہ ما = م لا کی تزییم کے متوازی رہتی ہے، لیکن ہم جانتے ہیں کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے ما = م لا ان سب خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء میں سے گزرتے ہیں اور اس کے گرد

ہر سمت میں چاروں طرف واقع ہیں جیسے نصف قطر مرکز دائرہ کے گرد، پس معلوم ہوا کہ ما = م لا $\pm \frac{1}{4}$ سے وہ سب خط تعبیر ہوتے ہیں جو نقطہ (۰، $\frac{1}{4}$) میں سے گزرتے ہیں اور اس کے گرد ہر سمت میں چاروں طرف واقع ہیں، یعنی اگر گھڑی کی سوئی کا ایک سرانقطہ (۰، $\frac{1}{4}$) پر رکھ دیا جائے اور سوئی اس سرے کے گرد گھومے تو اثنائے



گردش میں سوئی وہ سب خط مرتسم کرے گی جو مساوات $ما = م + لا + ج$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔
 اب اگر مساوات $ما = ج + لا + ج$ میں مستقل رقم اور لا کا سر دونوں بدلیں
 یعنی مساوات $ما = م + لا + ج$ میں $م$ کو بے شمار عددی قیمتیں دی جائیں اور ساتھ ہی
 ج کو بھی بے شمار مثبت، منفی قیمتیں دی جائیں تو ایسا کرنے سے جو مساواتیں
 حاصل ہونگی ان کی ترسیموں کا ہم اس طرح کچھ اندازہ لگا سکتے ہیں۔ فرض کرو
 کہ گھڑی کی سوئی کا ایک سر محور $ما$ پر رکھ دیا گیا ہے اور یہ سر اس محور کے نیچے
 سے اوپر تک نقطہ بہ نقطہ حرکت کرتا ہے اور ساتھ ہی ہر نقطہ پر اتنا توقف کرتا ہے
 کہ سوئی اس سرے کے گرد پوری یا آدھی گھوم جاتی ہے (پورے گھومنے سے
 ایک خط دو دفعہ مرتسم ہوگا) تو جو مستقیم خط سوئی اپنی اس دوگونہ حرکت میں مرتسم
 کرے گی وہی ترسیات مطلوبہ ہونگی۔

(ج) مساوات $ما = لا + ا$ کی ترسیم

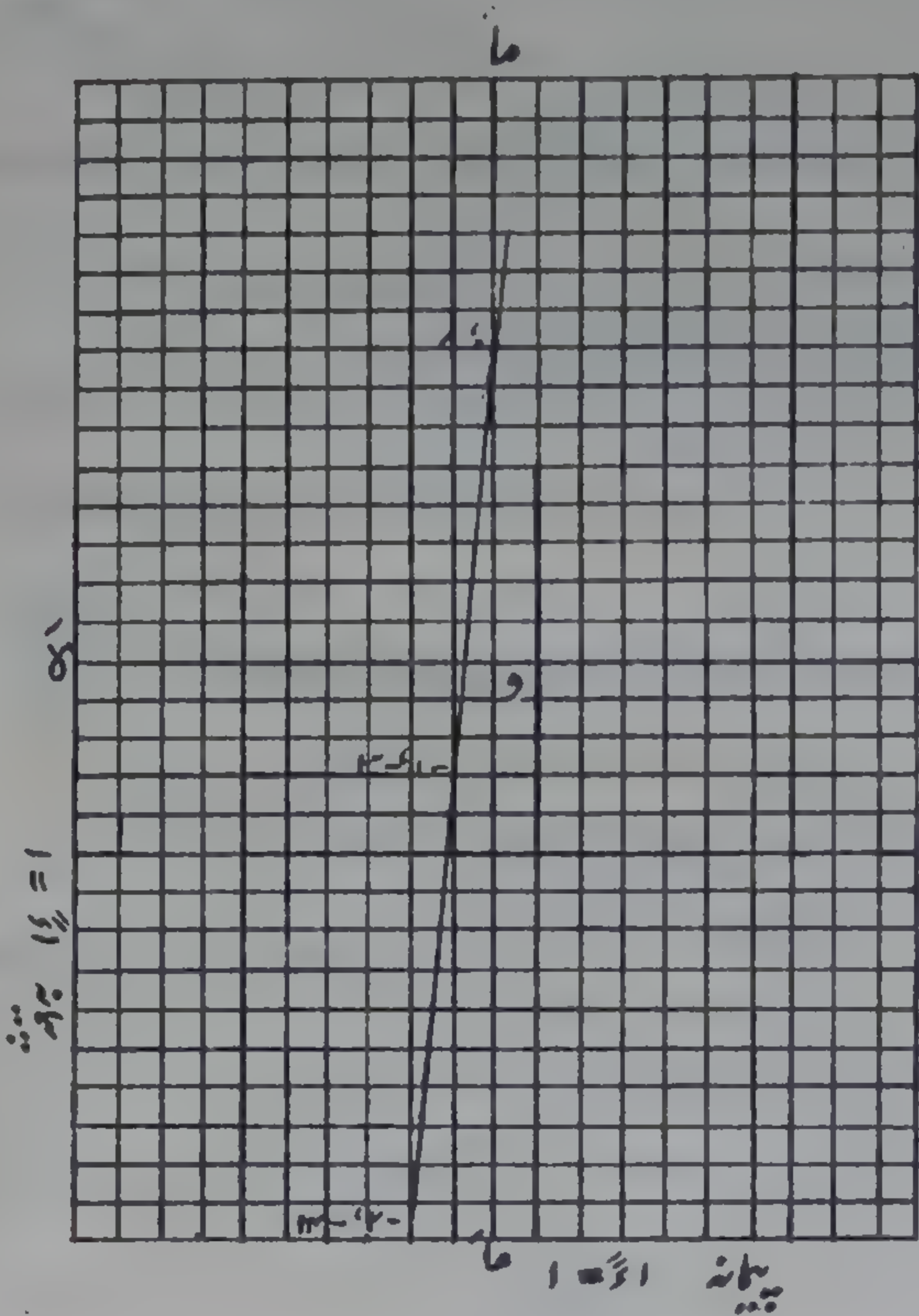
پیش صرف مناسب پیمانوں کے انتخاب کی خاطر دی گئی ہے، اب تک تمام
 سوالوں میں ہم لئے سہولت کے لئے فضلہ اور معین دونوں کو ایک ہی پیمانہ پر ناپا ہے
 لیکن یہ ضروری نہیں بلکہ آگے چل کر عام ترسیات میں ہم دیکھیں گے کہ تصویر کی خوبصورتی
 اور تناسب کے لئے یہ زیادہ مناسب ہے کہ متغیروں کو مختلف پیمانوں پر ناپا جائے،
 ترسیات کے سب سوال شروع سے آخر تک ایک جیسے ہیں اور ایک ہی طریقہ سے حل
 ہوتے ہیں مگر سوالوں کے خاص حالات کے موافق مناسب پیمانہ کا انتخاب مشق اور
 فراست پر مبنی ہے، طالب علم کو چاہیئے کہ ایک ہی سوال کو مختلف پیمانوں پر اور ایک ہی
 سوال کے متغیروں کے لئے مختلف پیمانے مان کر اسے حل کرے تاکہ پیمانوں کے منتخب
 کرنے میں اسے مشق حاصل ہو اور ان کے مناسب انتخاب کی اہمیت اس کے ذہن نشین
 ہو جائے۔

مساوات $ما = لا + ا$ میں

اگر	$لا =$	$۲ -$	$۱ -$	۰	۱	۲	۳
تو	$ما =$	$۱۲ -$	$۳ -$	۸	۱۹	۳۰	۴۱

بعض معین فصلوں کی نسبت بہت بڑے ہیں اور اگر لاگو ہو یا جائے تو معین بہت سرعت سے بڑھتے ہیں۔

اگر ہم نقاط بالا کے فضلوں اور معینوں کو ایک ہی پیمانہ پر مرتب کر دیں اور چھوٹے حصے کو کافی فرض کریں تو اس طرح کی شکل حاصل ہوگی جو بلحاظ محوروں کے بہت بے طرح واقع ہوتی ہے، اگر اس سے بڑا پیمانہ اختیار کیا جائے تو شکل کی ترسیم کے لئے بہت بڑے کاغذ کی ضرورت ہوگی اور کتاب کا صفحہ کافی نہ ہوگا۔

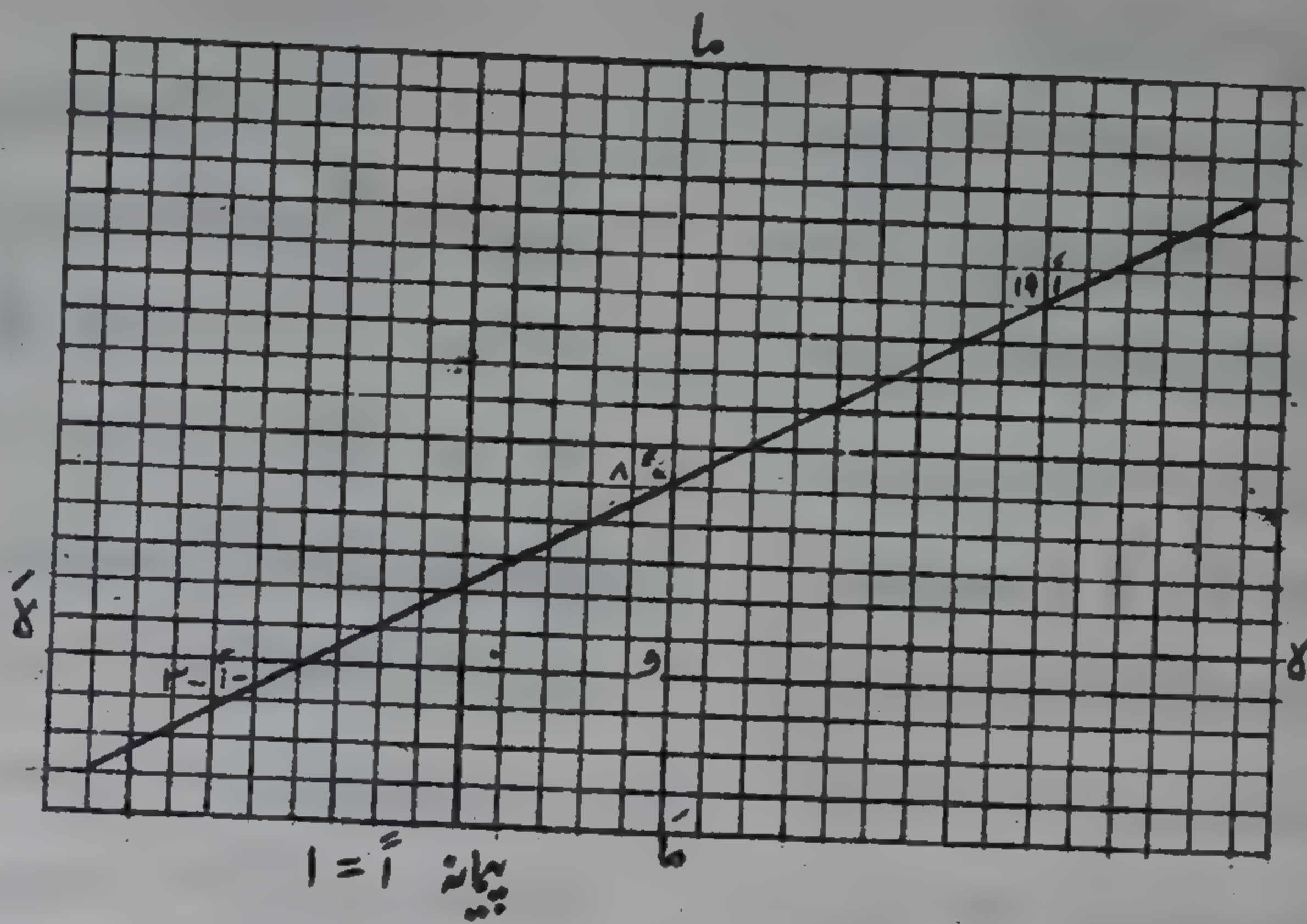


طالب علم فصلہ اور معین دونوں
کو ان پیانو پرناپ کر خود تجربہ کر لے۔
اکائی = ۲، ایچ ۱، ۵، ایچ،
ایک ایچ وغیرہ وغیرہ

اس تکلیف سے بچنے کی
ایک ترکیب یہ ہے کہ لا کے پہانہ کی
نسبت ما کی قیمتوں کو ناپنے کے لئے
مقابلہ چھوٹا پہانہ اختیار کیا جائے

مثلاً فرض کرو کہ لاکے تاپنے کی اکائی ایک اینج ہے اور ماکہ کی $\frac{1}{2}$ اینج، اس پہلے پر
 $11 + 8$ کی ترسیم حسب ذیل ہوگی جس میں نقطے $(-1, -3)$ $(0, -8)$ $(1, -19)$
 وغیرہ مرتب کئے گئے ہیں، عام طور پر یہ کلیہ درست ہوگا کہ جب ایک متغیر دوسرے
 کی نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہو تو اس سرعت پسند متغیر کے لئے چھوٹی اکائی
 منتخب کی جائے اور دوسرے کے لئے مقابلہ بڑی۔

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور لا کو مبداء سے چار خانے اوپر کاٹی ہے،
اب ہر چھوٹا خانہ ماکہ دو اکائیوں کے مساوی ہے پس اس نقطہ کا فاصلہ
مبداء سے ۸ ہوا یعنی مستقل رقم کے مساوی۔ طالب علم اس کی تصدیق کرے



کہ اگر اسی پیمانہ پر $M = 11$ لاکر ترسیم بنائی جائے تو دونوں ترسیمیں ایک دوسرے کے متوازی ہونگی۔

۱۱۔ اب ہم خطی مساوات کی عام صورت $M = L + J$ اور اس کی ترسیم کے باہمی تعلقات کو ایک جدول کی شکل میں بیاں کر سکتے ہیں، واضح ہو کہ جدول ذیل جدول صفحہ (۶۰، ۶۱) کی توسیع ہے۔

ہندسی تعبیر

جبریہ ربط

ہر صورت میں اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے۔

اس کی ترسیم پر بے شمار نقطے ہیں۔

ان کی ترسیمیں باہم متوازی ہیں۔

اس کی ترسیم محور L کی مثبت سمت L کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے۔

اس کی ترسیم محور L کی منفی سمت L

$M = L + J$ دو متغیروں کی مساوات درجہ اول ہے۔

مساوات $M = L + J$ کے بے شمار حل ہیں۔

مساوات $M = L + J$ اور $M = L$ میں L کے ہر مساوی ہیں۔

مساوات $M = L + J$ میں M مثبت ہے مثلاً $\frac{1}{2}$

مساوات $M = L + J$ میں M

ہندی تعبیر

کے ساتھ حادثہ زادہ بناتی ہے۔

اس کی ترسیم محور صا کو مبداء سے ج
اکائیوں کے فاصلہ پر قطع کرتی ہے۔

اس کی ترسیم کا زاویہ میلان محور سلا کی مثبت سمت و سلا کے ساتھ بڑھتا ہے۔
اس کی ترسیم کا زاویہ میلان محور سلا کی منفی سمت و سلا کے ساتھ بڑھتا ہے۔

ان کی تریسہیں محور ما پر کے ایک ہی
نقطہ (۰ ج) میں سے گزرتی ہیں
اور محور ما میں ایک دوسرے
کا عکس ہیں۔

امثلہ نمبری ۴۲

$$b_0 = 1 \text{ or } \pm 1, b_1 = 0 \text{ or } \pm 1, b_2 = 0 \text{ or } \pm 1, b_3 = 1 - p$$

۱- ا = ب " ۲ ب " ۳ - ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

۶۔ ایک ہی شکل میں $1 = 3$ لا، $1 = 3$ لا، $1 = 3$ لا، $1 = 3$ لا کی ترتیبیں بنادو۔

۷۔ نقاط ذیل کو مرتبہ کر دو (۳، ۲) (۹، ۶) (۰، ۰) (۱۰، ۱۵) (۱، ۱) (۳، ۳)
(۳، ۳) (۵، ۵) جس جبریہ مساوات کو وہ پورا کرتے ہیں اسے معلوم کر دو اور اس کی

ترسیم بناؤ۔
ذیل کی سات مثالوں میں لا کو قیمتیں ۰، ۱، ۳، ۵، ۲، ۴ دینے سے ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو، ہر صورت میں شکل بنا کر دکھاؤ کہ اس طرح جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے۔

$$9 - 3 = 6$$

$$11 - 3 = 8$$

$$13 - 5 = 8$$

$$8 - 3 = 5$$

$$10 - 3 = 7$$

$$12 - 5 = 7$$

$$14 - 3 = 11$$

۱۵۔ ایک ہی شکل میں، ایک ہی پیمانہ پر ان چار مساواتوں کی ترسیبیں بناؤ۔

$$(1) \quad 3 + 6 = 9$$

$$(2) \quad 3 - 6 = -3$$

$$(3) \quad 3 - 6 = -3$$

$$(4) \quad 3 + 6 = 9$$

۱۶۔ تفاعیل $\frac{3}{5}$ ، $\frac{6}{10}$ ، $\frac{9}{15}$ ، $\frac{12}{20}$ ، $\frac{15}{25}$ ، $\frac{18}{30}$ ، $\frac{21}{35}$ ، $\frac{24}{40}$ ، $\frac{27}{45}$ ، $\frac{30}{50}$ ، $\frac{33}{55}$ ، $\frac{36}{60}$ ، $\frac{39}{65}$ ، $\frac{42}{70}$ ، $\frac{45}{75}$ ، $\frac{48}{80}$ ، $\frac{51}{85}$ ، $\frac{54}{90}$ ، $\frac{57}{95}$ ، $\frac{60}{100}$ ، $\frac{63}{105}$ ، $\frac{66}{110}$ ، $\frac{69}{115}$ ، $\frac{72}{120}$ ، $\frac{75}{125}$ ، $\frac{78}{130}$ ، $\frac{81}{135}$ ، $\frac{84}{140}$ ، $\frac{87}{145}$ ، $\frac{90}{150}$ ، $\frac{93}{155}$ ، $\frac{96}{160}$ ، $\frac{99}{165}$ ، $\frac{102}{170}$ ، $\frac{105}{175}$ ، $\frac{108}{180}$ ، $\frac{111}{185}$ ، $\frac{114}{190}$ ، $\frac{117}{195}$ ، $\frac{120}{200}$ ، $\frac{123}{205}$ ، $\frac{126}{210}$ ، $\frac{129}{215}$ ، $\frac{132}{220}$ ، $\frac{135}{225}$ ، $\frac{138}{230}$ ، $\frac{141}{235}$ ، $\frac{144}{240}$ ، $\frac{147}{245}$ ، $\frac{150}{250}$ ، $\frac{153}{255}$ ، $\frac{156}{260}$ ، $\frac{159}{265}$ ، $\frac{162}{270}$ ، $\frac{165}{275}$ ، $\frac{168}{280}$ ، $\frac{171}{285}$ ، $\frac{174}{290}$ ، $\frac{177}{295}$ ، $\frac{180}{300}$ ، $\frac{183}{305}$ ، $\frac{186}{310}$ ، $\frac{189}{315}$ ، $\frac{192}{320}$ ، $\frac{195}{325}$ ، $\frac{198}{330}$ ، $\frac{201}{335}$ ، $\frac{204}{340}$ ، $\frac{207}{345}$ ، $\frac{210}{350}$ ، $\frac{213}{355}$ ، $\frac{216}{360}$ ، $\frac{219}{365}$ ، $\frac{222}{370}$ ، $\frac{225}{375}$ ، $\frac{228}{380}$ ، $\frac{231}{385}$ ، $\frac{234}{390}$ ، $\frac{237}{395}$ ، $\frac{240}{400}$ ، $\frac{243}{405}$ ، $\frac{246}{410}$ ، $\frac{249}{415}$ ، $\frac{252}{420}$ ، $\frac{255}{425}$ ، $\frac{258}{430}$ ، $\frac{261}{435}$ ، $\frac{264}{440}$ ، $\frac{267}{445}$ ، $\frac{270}{450}$ ، $\frac{273}{455}$ ، $\frac{276}{460}$ ، $\frac{279}{465}$ ، $\frac{282}{470}$ ، $\frac{285}{475}$ ، $\frac{288}{480}$ ، $\frac{291}{485}$ ، $\frac{294}{490}$ ، $\frac{297}{495}$ ، $\frac{300}{500}$ ، $\frac{303}{505}$ ، $\frac{306}{510}$ ، $\frac{309}{515}$ ، $\frac{312}{520}$ ، $\frac{315}{525}$ ، $\frac{318}{530}$ ، $\frac{321}{535}$ ، $\frac{324}{540}$ ، $\frac{327}{545}$ ، $\frac{330}{550}$ ، $\frac{333}{555}$ ، $\frac{336}{560}$ ، $\frac{339}{565}$ ، $\frac{342}{570}$ ، $\frac{345}{575}$ ، $\frac{348}{580}$ ، $\frac{351}{585}$ ، $\frac{354}{590}$ ، $\frac{357}{595}$ ، $\frac{360}{600}$ ، $\frac{363}{605}$ ، $\frac{366}{610}$ ، $\frac{369}{615}$ ، $\frac{372}{620}$ ، $\frac{375}{625}$ ، $\frac{378}{630}$ ، $\frac{381}{635}$ ، $\frac{384}{640}$ ، $\frac{387}{645}$ ، $\frac{390}{650}$ ، $\frac{393}{655}$ ، $\frac{396}{660}$ ، $\frac{399}{665}$ ، $\frac{402}{670}$ ، $\frac{405}{675}$ ، $\frac{408}{680}$ ، $\frac{411}{685}$ ، $\frac{414}{690}$ ، $\frac{417}{695}$ ، $\frac{420}{700}$ ، $\frac{423}{705}$ ، $\frac{426}{710}$ ، $\frac{429}{715}$ ، $\frac{432}{720}$ ، $\frac{435}{725}$ ، $\frac{438}{730}$ ، $\frac{441}{735}$ ، $\frac{444}{740}$ ، $\frac{447}{745}$ ، $\frac{450}{750}$ ، $\frac{453}{755}$ ، $\frac{456}{760}$ ، $\frac{459}{765}$ ، $\frac{462}{770}$ ، $\frac{465}{775}$ ، $\frac{468}{780}$ ، $\frac{471}{785}$ ، $\frac{474}{790}$ ، $\frac{477}{795}$ ، $\frac{480}{800}$ ، $\frac{483}{805}$ ، $\frac{486}{810}$ ، $\frac{489}{815}$ ، $\frac{492}{820}$ ، $\frac{495}{825}$ ، $\frac{498}{830}$ ، $\frac{501}{835}$ ، $\frac{504}{840}$ ، $\frac{507}{845}$ ، $\frac{510}{850}$ ، $\frac{513}{855}$ ، $\frac{516}{860}$ ، $\frac{519}{865}$ ، $\frac{522}{870}$ ، $\frac{525}{875}$ ، $\frac{528}{880}$ ، $\frac{531}{885}$ ، $\frac{534}{890}$ ، $\frac{537}{895}$ ، $\frac{540}{900}$ ، $\frac{543}{905}$ ، $\frac{546}{910}$ ، $\frac{549}{915}$ ، $\frac{552}{920}$ ، $\frac{555}{925}$ ، $\frac{558}{930}$ ، $\frac{561}{935}$ ، $\frac{564}{940}$ ، $\frac{567}{945}$ ، $\frac{570}{950}$ ، $\frac{573}{955}$ ، $\frac{576}{960}$ ، $\frac{579}{965}$ ، $\frac{582}{970}$ ، $\frac{585}{975}$ ، $\frac{588}{980}$ ، $\frac{591}{985}$ ، $\frac{594}{990}$ ، $\frac{597}{995}$ ، $\frac{600}{1000}$ ، $\frac{603}{1005}$ ، $\frac{606}{1010}$ ، $\frac{609}{1015}$ ، $\frac{612}{1020}$ ، $\frac{615}{1025}$ ، $\frac{618}{1030}$ ، $\frac{621}{1035}$ ، $\frac{624}{1040}$ ، $\frac{627}{1045}$ ، $\frac{630}{1050}$ ، $\frac{633}{1055}$ ، $\frac{636}{1060}$ ، $\frac{639}{1065}$ ، $\frac{642}{1070}$ ، $\frac{645}{1075}$ ، $\frac{648}{1080}$ ، $\frac{651}{1085}$ ، $\frac{654}{1090}$ ، $\frac{657}{1095}$ ، $\frac{660}{1100}$ ، $\frac{663}{1105}$ ، $\frac{666}{1110}$ ، $\frac{669}{1115}$ ، $\frac{672}{1120}$ ، $\frac{675}{1125}$ ، $\frac{678}{1130}$ ، $\frac{681}{1135}$ ، $\frac{684}{1140}$ ، $\frac{687}{1145}$ ، $\frac{690}{1150}$ ، $\frac{693}{1155}$ ، $\frac{696}{1160}$ ، $\frac{699}{1165}$ ، $\frac{702}{1170}$ ، $\frac{705}{1175}$ ، $\frac{708}{1180}$ ، $\frac{711}{1185}$ ، $\frac{714}{1190}$ ، $\frac{717}{1195}$ ، $\frac{720}{1200}$ ، $\frac{723}{1205}$ ، $\frac{726}{1210}$ ، $\frac{729}{1215}$ ، $\frac{732}{1220}$ ، $\frac{735}{1225}$ ، $\frac{738}{1230}$ ، $\frac{741}{1235}$ ، $\frac{744}{1240}$ ، $\frac{747}{1245}$ ، $\frac{750}{1250}$ ، $\frac{753}{1255}$ ، $\frac{756}{1260}$ ، $\frac{759}{1265}$ ، $\frac{762}{1270}$ ، $\frac{765}{1275}$ ، $\frac{768}{1280}$ ، $\frac{771}{1285}$ ، $\frac{774}{1290}$ ، $\frac{777}{1295}$ ، $\frac{780}{1300}$ ، $\frac{783}{1305}$ ، $\frac{786}{1310}$ ، $\frac{789}{1315}$ ، $\frac{792}{1320}$ ، $\frac{795}{1325}$ ، $\frac{798}{1330}$ ، $\frac{801}{1335}$ ، $\frac{804}{1340}$ ، $\frac{807}{1345}$ ، $\frac{810}{1350}$ ، $\frac{813}{1355}$ ، $\frac{816}{1360}$ ، $\frac{819}{1365}$ ، $\frac{822}{1370}$ ، $\frac{825}{1375}$ ، $\frac{828}{1380}$ ، $\frac{831}{1385}$ ، $\frac{834}{1390}$ ، $\frac{837}{1395}$ ، $\frac{840}{1400}$ ، $\frac{843}{1405}$ ، $\frac{846}{1410}$ ، $\frac{849}{1415}$ ، $\frac{852}{1420}$ ، $\frac{855}{1425}$ ، $\frac{858}{1430}$ ، $\frac{861}{1435}$ ، $\frac{864}{1440}$ ، $\frac{867}{1445}$ ، $\frac{870}{1450}$ ، $\frac{873}{1455}$ ، $\frac{876}{1460}$ ، $\frac{879}{1465}$ ، $\frac{882}{1470}$ ، $\frac{885}{1475}$ ، $\frac{888}{1480}$ ، $\frac{891}{1485}$ ، $\frac{894}{1490}$ ، $\frac{897}{1495}$ ، $\frac{900}{1500}$ ، $\frac{903}{1505}$ ، $\frac{906}{1510}$ ، $\frac{909}{1515}$ ، $\frac{912}{1520}$ ، $\frac{915}{1525}$ ، $\frac{918}{1530}$ ، $\frac{921}{1535}$ ، $\frac{924}{1540}$ ، $\frac{927}{1545}$ ، $\frac{930}{1550}$ ، $\frac{933}{1555}$ ، $\frac{936}{1560}$ ، $\frac{939}{1565}$ ، $\frac{942}{1570}$ ، $\frac{945}{1575}$ ، $\frac{948}{1580}$ ، $\frac{951}{1585}$ ، $\frac{954}{1590}$ ، $\frac{957}{1595}$ ، $\frac{960}{1600}$ ، $\frac{963}{1605}$ ، $\frac{966}{1610}$ ، $\frac{969}{1615}$ ، $\frac{972}{1620}$ ، $\frac{975}{1625}$ ، $\frac{978}{1630}$ ، $\frac{981}{1635}$ ، $\frac{984}{1640}$ ، $\frac{987}{1645}$ ، $\frac{990}{1650}$ ، $\frac{993}{1655}$ ، $\frac{996}{1660}$ ، $\frac{999}{1665}$ ، $\frac{1002}{1670}$ ، $\frac{1005}{1675}$ ، $\frac{1008}{1680}$ ، $\frac{1011}{1685}$ ، $\frac{1014}{1690}$ ، $\frac{1017}{1695}$ ، $\frac{1020}{1700}$ ، $\frac{1023}{1705}$ ، $\frac{1026}{1710}$ ، $\frac{1029}{1715}$ ، $\frac{1032}{1720}$ ، $\frac{1035}{1725}$ ، $\frac{1038}{1730}$ ، $\frac{1041}{1735}$ ، $\frac{1044}{1740}$ ، $\frac{1047}{1745}$ ، $\frac{1050}{1750}$ ، $\frac{1053}{1755}$ ، $\frac{1056}{1760}$ ، $\frac{1059}{1765}$ ، $\frac{1062}{1770}$ ، $\frac{1065}{1775}$ ، $\frac{1068}{1780}$ ، $\frac{1071}{1785}$ ، $\frac{1074}{1790}$ ، $\frac{1077}{1795}$ ، $\frac{1080}{1800}$ ، $\frac{1083}{1805}$ ، $\frac{1086}{1810}$ ، $\frac{1089}{1815}$ ، $\frac{1092}{1820}$ ، $\frac{1095}{1825}$ ، $\frac{1098}{1830}$ ، $\frac{1101}{1835}$ ، $\frac{1104}{1840}$ ، $\frac{1107}{1845}$ ، $\frac{1110}{1850}$ ، $\frac{1113}{1855}$ ، $\frac{1116}{1860}$ ، $\frac{1119}{1865}$ ، $\frac{1122}{1870}$ ، $\frac{1125}{1875}$ ، $\frac{1128}{1880}$ ، $\frac{1131}{1885}$ ، $\frac{1134}{1890}$ ، $\frac{1137}{1895}$ ، $\frac{1140}{1900}$ ، $\frac{1143}{1905}$ ، $\frac{1146}{1910}$ ، $\frac{1149}{1915}$ ، $\frac{1152}{1920}$ ، $\frac{1155}{1925}$ ، $\frac{1158}{1930}$ ، $\frac{1161}{1935}$ ، $\frac{1164}{1940}$ ، $\frac{1167}{1945}$ ، $\frac{1170}{1950}$ ، $\frac{1173}{1955}$ ، $\frac{1176}{1960}$ ، $\frac{1179}{1965}$ ، $\frac{1182}{1970}$ ، $\frac{1185}{1975}$ ، $\frac{1188}{1980}$ ، $\frac{1191}{1985}$ ، $\frac{1194}{1990}$ ، $\frac{1197}{1995}$ ، $\frac{1200}{2000}$ ، $\frac{1203}{2005}$ ، $\frac{1206}{2010}$ ، $\frac{1209}{2015}$ ، $\frac{1212}{2020}$ ، $\frac{1215}{2025}$ ، $\frac{1218}{2030}$ ، $\frac{1221}{2035}$ ، $\frac{1224}{2040}$ ، $\frac{1227}{2045}$ ، $\frac{1230}{2050}$ ، $\frac{1233}{2055}$ ، $\frac{1236}{2060}$ ، $\frac{1239}{2065}$ ، $\frac{1242}{2070}$ ، $\frac{1245}{2075}$ ، $\frac{1248}{2080}$ ، $\frac{1251}{2085}$ ، $\frac{1254}{2090}$ ، $\frac{1257}{2095}$ ، $\frac{1260}{2100}$ ، $\frac{1263}{2105}$ ، $\frac{1266}{2110}$ ، $\frac{1269}{2115}$ ، $\frac{1272}{2120}$ ، $\frac{1275}{2125}$ ، $\frac{1278}{2130}$ ، $\frac{1281}{2135}$ ، $\frac{1284}{2140}$ ، $\frac{1287}{2145}$ ، $\frac{1290}{2150}$ ، $\frac{1293}{2155}$ ، $\frac{1296}{2160}$ ، $\frac{1299}{2165}$ ، $\frac{1302}{2170}$ ، $\frac{1305}{2175}$ ، $\frac{1308}{2180}$ ، $\frac{1311}{2185}$ ، $\frac{1314}{2190}$ ، $\frac{1317}{2195}$ ، $\frac{1320}{2200}$ ، $\frac{1323}{2205}$ ، $\frac{1326}{2210}$ ، $\frac{1329}{2215}$ ، $\frac{1332}{2220}$ ، $\frac{1335}{2225}$ ، $\frac{1338}{2230}$ ، $\frac{1341}{2235}$ ، $\frac{1344}{2240}$ ، $\frac{1347}{2245}$ ، $\frac{1350}{2250}$ ، $\frac{1353}{2255}$ ، $\frac{1356}{2260}$ ، $\frac{1359}{2265}$ ، $\frac{1362}{2270}$ ، $\frac{1365}{2275}$ ، $\frac{1368}{2280}$ ، $\frac{1371}{2285}$ ، $\frac{1374}{2290}$ ، $\frac{1377}{2295}$ ، $\frac{1380}{2300}$ ، $\frac{1383}{2305}$ ، $\frac{1386}{2310}$ ، $\frac{1389}{2315}$ ، $\frac{1392}{2320}$ ، $\frac{1395}{2325}$ ، $\frac{1398}{2330}$ ، $\frac{1401}{2335}$ ، $\frac{1404}{2340}$ ، $\frac{1407}{2345}$ ، $\frac{1410}{2350}$ ، $\frac{1413}{2355}$ ، $\frac{1416}{2360}$ ، $\frac{1419}{2365}$ ، $\frac{1422}{2370}$ ، $\frac{1425}{2375}$ ، $\frac{1428}{2380}$ ، $\frac{1431}{2385}$ ، $\frac{1434}{2390}$ ، $\frac{1437}{2395}$ ، $\frac{1440}{2400}$ ، $\frac{1443}{2405}$ ، $\frac{1446}{2410}$ ، $\frac{1449}{2415}$ ، $\frac{1452}{2420}$ ، $\frac{1455}{2425}$ ، $\frac{1458}{2430}$ ، $\frac{1461}{2435}$ ، $\frac{1464}{2440}$ ، $\frac{1467}{2445}$ ، $\frac{1470}{2450}$ ، $\frac{1473}{2455}$ ، $\frac{1476}{2460}$ ، $\frac{1479}{2465}$ ، $\frac{1482}{2470}$ ، $\frac{1485}{2475}$ ، $\frac{1488}{2480}$ ، $\frac{1491}{2485}$ ، $\frac{1494}{2490}$ ، $\frac{1497}{2495}$ ، $\frac{1500}{2500}$ ، $\frac{1503}{2505}$ ، $\frac{1506}{2510}$ ، $\frac{1509}{2515}$ ، $\frac{1512}{2520}$ ، $\frac{1515}{2525}$ ، $\frac{1518}{2530}$ ، $\frac{1521}{2535}$ ، $\frac{1524}{2540}$ ، $\frac{1527}{2545}$ ، $\frac{1530}{2550}$ ، $\frac{1533}{2555}$ ، $\frac{1536}{2560}$ ، $\frac{1539}{2565}$ ، $\frac{1542}{2570}$ ، $\frac{1545}{2575}$ ، $\frac{1548}{2580}$ ، $\frac{1551}{2585}$ ، $\frac{1554}{2590}$ ، $\frac{1557}{2595}$ ، $\frac{1560}{2600}$ ، $\frac{1563}{2605}$ ، $\frac{1566}{2610}$ ، $\frac{1569}{2615}$ ، $\frac{1572}{2620}$ ، $\frac{1575}{2625}$ ، $\frac{1578}{2630}$ ، $\frac{1581}{2635}$ ، $\frac{1584}{2640}$ ، $\frac{1587}{2645}$ ، $\frac{1590}{2650}$ ، $\frac{1593}{2655}$ ، $\frac{1596}{2660}$ ، $\frac{1599}{2665}$ ، $\frac{1602}{2670}$ ، $\frac{1605}{2675}$ ، $\frac{1608}{2680}$ ، $\frac{1611}{2685}$ ، $\frac{1614}{2690}$ ، $\frac{1617}{2695}$ ، $\frac{1620}{2700}$ ، $\frac{1623}{2705}$ ، $\frac{1626}{2710}$ ، $\frac{1629}{2715}$ ، $\frac{1632}{2720}$ ، $\frac{1635}{2725}$ ، $\frac{1638}{2730}$ ، $\frac{1641}{2735}$ ، $\frac{1644}{2740}$ ، $\frac{1647}{2745}$ ، $\frac{1650}{2750}$ ، $\frac{1653}{2755}$ ، $\frac{1656}{2760}$ ، $\frac{1659}{2765}$ ، $\frac{1662}{2770}$ ، $\frac{1665}{2775}$ ، $\frac{1668}{2780}$ ، $\frac{1671}{2785}$ ، $\frac{1674}{2790}$ ، $\frac{1677}{2795}$ ، $\frac{1680}{2800}$ ، $\frac{1683}{2805}$ ، $\frac{1686}{2810}$ ، $\frac{1689}{2815}$ ، $\frac{1692}{2820}$ ، $\frac{1695}{2825}$ ، $\frac{1698}{2830}$ ، $\frac{1701}{2835}$ ، $\frac{1704}{2840}$ ، $\frac{1707}{2845}$ ، $\frac{1710}{2850}$ ، $\frac{1713}{2855}$ ، $\frac{1716}{2860}$ ، $\frac{1719}{2865}$ ، $\frac{1722}{2870}$ ، $\frac{1725}{2875}$ ، $\frac{1728}{2880}$ ، $\frac{1731}{2885}$ ، $\frac{1734}{2890}$ ، $\frac{1737}{2895}$ ، $\frac{1740}{2900}$ ، $\frac{1743}{2905}$ ، $\frac{1746}{2910}$ ، $\frac{1749}{2915}$ ، $\frac{1752}{2920}$ ، $\frac{1755}{2925}$ ، $\frac{1758}{2930}$ ، $\frac{1761}{2935}$ ، $\frac{1764}{2940}$ ، $\frac{1767}{2945}$ ، $\frac{1770}{2950}$ ، $\frac{1773}{2955}$ ، $\frac{1776}{2960}$ ، $\frac{1779}{2965}$ ، $\frac{1782}{2970}$ ، $\frac{1785}{2975}$ ، $\frac{1788}{2980}$ ، $\frac{1791}{2985}$ ، $\frac{1794}{2990}$ ، $\frac{1797}{2995}$ ، $\frac{1800}{3000}$ ، $\frac{1803}{3005}$ ، $\frac{1806}{3010}$ ، $\frac{1809}{3015}$ ، $\frac{1812}{3020}$ ، $\frac{1815}{3025}$ ، $\frac{1818}{3030}$ ، $\frac{1821}{3035}$ ، $\frac{1824}{3040}$ ، $\frac{1827}{3045}$ ، $\frac{1830}{3050}$ ، $\frac{1833}{3055}$ ، $\frac{1836}{3060}$ ، $\frac{1839}{3065}$ ، $\frac{1842}{3070}$ ، $\frac{1845}{3075}$ ، $\frac{1848}{3080}$ ، $\frac{1851}{3085}$ ، $\frac{1854}{3090}$ ، $\frac{1857}{3095}$ ، $\frac{1860}{3100}$ ، $\frac{1863}{3105}$ ، $\frac{1866}{3110}$ ، $\frac{1869}{3115}$ ، $\frac{1872}{3120}$ ، $\frac{1875}{3125}$ ، $\frac{1878}{3130}$ ، $\frac{1881}{3135}$ ، $\frac{1884}{3140}$ ، $\frac{1887}{3145}$ ، $\frac{1890}{3150}$ ، $\frac{1893}{3155}$ ، $\frac{1896}{3160}$ ، $\frac{1899}{3165}$ ، $\frac{1902}{3170}$ ، $\frac{1905}{3175}$ ، $\frac{1908}{3180}$ ، $\frac{1911}{3185}$ ، $\frac{1914}{3190}$ ، $\frac{1917}{3195}$ ، $\frac{1920}{3200}$ ، $\frac{1923}{3205}$ ، $\frac{1926}{3210}$ ، $\frac{1929}{3215}$ ، $\frac{1932}{3220}$ ، $\frac{1935}{3225}$ ، $\frac{1938}{3230}$ ، $\frac{1941}{3235}$ ، $\frac{1944}{3240}$ ، $\frac{1947}{3245}$ ، $\frac{1950}{3250}$ ، $\frac{1953}{3255}$ ، $\frac{1956}{3260}$ ، $\frac{1959}{3265}$ ، $\frac{1962}{3270}$ ، $\frac{1965}{3275}$ ، $\frac{1968}{3280}$ ، $\frac{1971}{3285}$ ، $\frac{1974}{3290}$ ، $\frac{1977}{3295}$ ، $\frac{1980}{3300}$ ، $\frac{1983}{3305}$ ، $\frac{1986}{3310}$ ، $\frac{1989}{3315}$ ، $\frac{1992}{3320}$ ، $\frac{1995}{3325}$ ، $\frac{1998}{3330}$ ، $\frac{2001}{3335}$ ، $\frac{2004}{3340}$ ، $\frac{2007}{3345}$ ،

اب فرض کرو کہ ایسی دو مساواتیں

دی گئی ہیں اور لا، ما کی قیمتوں کا ایک جوڑا (یا زیادہ جوڑے) مطلوب ہیں جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کریں یعنی اگر ایسے جوڑے کے لا، ما کو (۱) میں مندرج کیا جائے تو یہ پوری ہو جائے اور ساتھ ہی اگر (۲) میں مندرج کیا جائے تو یہ بھی پوری ہو جائے۔ اگرچہ ان مساواتوں میں سے کسی ایک کو پورا کرنے والے بے شمار جوڑے ہیں مگر ہم دیکھیں گے کہ ایسا جوڑا صرف ایک ہی ہے جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے اس کو ان مساواتوں کا حل کہتے ہیں اور ایسی مساواتیں ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔

جبر یہ حل۔ فرض کرو کہ لا، ما کی قیمتیں لا، ما، دو نوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتی ہیں، تب

$$5 \quad | \quad لا - ۲ - ما = ۰$$

$$1- \quad | \quad لا + ۵ - ما = ۰$$

پہلی مساوات کو ۵ اور دوسری کو -۱ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے
 $- لا + ۱۵ - ۲ - ما = ۰$ یعنی $لا = ۱۳ - ۲ - ما$ اور ما کی قیمت کسی مساوات مثلاً (۱)

میں مندرج کرنے سے $لا + ۵ - ۱۳ + ۲ - ما = ۰$

یعنی $لا = ۶ - ۲ - ما$ پس $لا = ۴ - ۲ - ما$ مساواتوں کا حل ہے، یعنی لا، ما کی

قیمتوں کا صرف ایک جوڑا $(\frac{۴}{۵}, \frac{۲}{۵})$ دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے، طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

ترسیم حل۔ طالب علم نے دو متغیروں کی مساوات درجہ اول اور اسکی ترسیم کے باہمی تعلق پر غور کیا ہوگا، مساوات کا ہر ایک حل ترسیم پر کے ایک نقطہ کو تعبیر کرتا ہے اور ترسیم پر کا ہر ایک نقطہ مساوات کا ایک حل ہے۔ اب اگر ایک ہی پیمانہ پر دو خطی مساواتوں کی ترسیم بنائی جائیں

تو یہ دونوں مستقیم خط ہونگی اور ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کریں گی۔ یہ نقطہ دونوں ترسیموں پر واقع ہوگا، ایک ترسیم پر ہونے کی وجہ سے اس کے محدود اس ترسیم کی مساوات کو پورا کریں گے، اسی طرح دوسری ترسیم پر واقع ہونے کی وجہ سے اس کے محدود دوسری ترسیم کی مساوات کو پورا کریں گے، یعنی اس نقطہ کے محدود دونوں مساواتوں کو پورا کریں گے یا بالفاظ دیگر ان مساواتوں کا حل ہو گئے، پس دو خطی ہمزا مساواتوں کو ترسیمی طریق پر ہم اس طرح حل کر سکتے ہیں، ایک ہی پیمانہ پر دونوں مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ اور جہاں یہ ایک دوسرے کو قطع کریں اس نقطہ کے محدود شکل سے دیکھو، یہ محدود یعنی لا، ما کی قیمتوں کا جوڑا دونوں مساواتوں کا حل ہوگا۔

نوٹ - یاد رہے کہ دونوں ترسیمیں ایک ہی پیمانہ پر بنائی جائیں، اس سے یہ مراد ہے کہ دونوں مساواتوں میں فصلوں کی اکائیاں ایک ہی ہوں اور معینوں کی بھی ایک ہی، لیکن فصلہ اور معین دونوں کے لئے ایک ہی اکائی استعمال ہو سکتی ہے۔

(۱) کو ترسیمی طریق پر حل کرو۔
(۲) لا - ۱۲ - ۲ = ۰
۱۵ + ۱۵ - ۳۰ = ۰

ان مساواتوں کو معیاری شکل میں اس طرح لکھو
(۱) $\frac{1}{4} = ۱ - لا$
(۲) $\frac{۲}{۵} + لا = ۱$
ان کے حلوں سے یہ جدولیں مرتب ہو سکتی ہیں

$$۱۵ + ۱۵ - ۳۰ = ۰$$

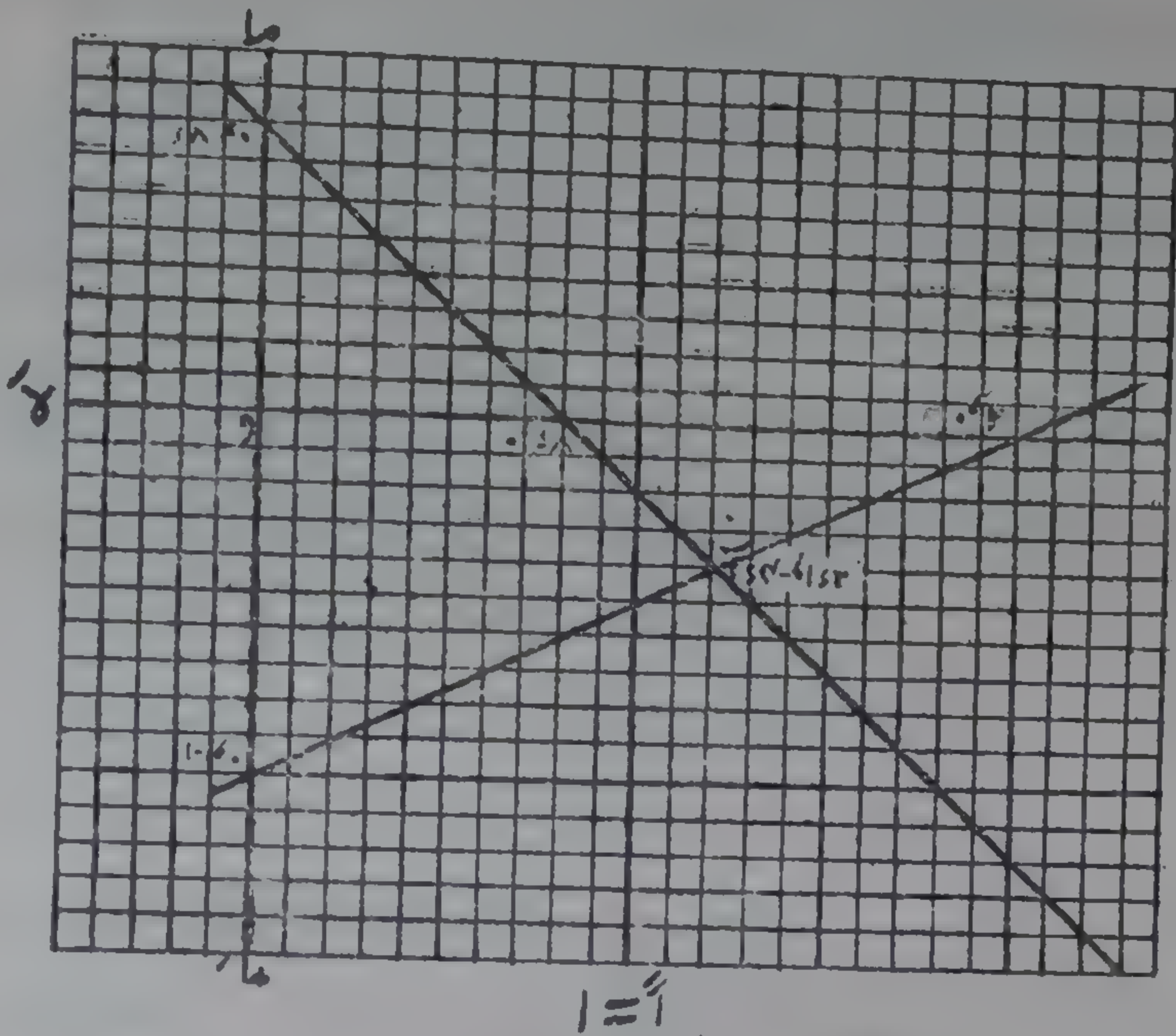
$$لا - ۱۲ - ۲ = ۰$$

۰ = لا	۱۵	۱	۰ = ۰
۰ = ۱۵	۰	۱۲ -	۰ = ۰

۰ = لا	۲	۱	۰ = ۰
۰ = ۱	۰	۱۵ -	۰ = ۰

دونوں مساواتوں میں فصلہ اور معین کے لئے ایک ایچ کو اکائی فرض کرو، اس طرح چھوٹا حصہ ۱، کو تعبیر کرے گا۔

جدولوں کے نقطوں کو مرتسم کرنے سے دو مستقیم خط حاصل ہوتے ہیں،



یہ ان
مساواتوں
کی ترکیبیں
ہیں اور یہ
ایک
دوسرے
کو ایک
نقطہ ن پر
قطع کرتی
ہیں۔ اب

ن کے محدود (۱۴۳-۱۵۲) یعنی نقطہ ن کا لا = ۱۵۲ اور ما = ۱۴۳
اب یہ نقطہ پہلی مساوات کی ترکیب پر واقع ہے، اس لئے
مساوات لا = ۱۵۲ - ما = ۲۰ کا حل ہے، نیز یہ دوسری ترکیب پر ہے
اس لئے یہ مساوات ۵ لا + ۵ ما = ۴۰ کا حل ہے، پس یہ دونوں مساواتوں
کا حل ہے اور یہی معلوم کرنا مطلوب تھا۔

تصدیق۔ جبر یہ طریق پر اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے لا = ۱۵۲ اور
ما = ۱۴۳، پہلی مساوات میں لا، ما کی یہ قیمتیں رکھنے سے

لا = ۱۵۲ - ما = ۲۰ - (۱۴۳ - ۵) = ۲۰ - ۱۳۸ = ۱۵۲ - ۱۴۳ = ۱۰

۵ لا + ۵ ما = ۴۰ - ۵ (۱۴۳ - ۵) = ۴۰ - ۷۰۰ = ۳۶۰

اس لئے لا = ۲۰، ما = ۱۴۳، مطلوبہ حل ہے۔

متبادل ثبوت۔ ہم نے اوپر دیکھا کہ دو خطی ہمزاد مساواتوں کا حل معلوم
کرنے کے لئے کیا ضروری ہے، ہمیں ایک ہی پیمانہ پر ان مساواتوں کی ترکیبیں
بنانی چاہئیں، پھر ان ترکیبوں کے نقطہ التقاطع کے محدود شکل سے معلوم کرنے
چاہئیں، اب اگر ہم گزشتہ مثالوں کی بنا پر یہ مان لیں کہ ہر صورت میں دو متغیروں
کی مساوات درجہ اول کی ترکیب ایک مستقیم خط ہے تو ترکیب بنانے کا عمل ذرا مختصر

ہو سکتا ہے اور بہت سے حلوں کی لمبی حدود لیں بنا نا ضروری نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ ایک ایسی مساوات دی ہوئی ہے، اس کو دیکھتے ہی ہم پہچان لیں گے کہ اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے، اس مستقیم خط کے محل کا تعین کرنے کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں اور ہر نقطہ مساوات کا ایک حل ہے اس مساوات کے صرف دو حل ترسیم بنانے کے لئے ضروری ہوئے اس لئے معلوم ہوا کہ خطی مساوات کی ترسیم بنانے کے لئے ہم اس مساوات کے کوئی سے دو حل لے سکتے ہیں اور ان کو مرسم کرنے سے ترسیم بنا سکتے ہیں۔

اکثر اوقات مساوات میں لا کو صفر کے مساوی فرض کرنے سے ماکہ متناظر قیمت معلوم کرتے ہیں، اس طرح سے ایک حل حاصل ہوتا ہے اور یہ حل ترسیم کا وہ نقطہ ہے جہاں یہ محور ما سے ملتی ہے کیونکہ اس کا لا محدود صفر ہے۔ اسی طرح دوسرا حل معلوم کرنے کے لئے ماکہ صفر کے مساوی فرض کرتے ہیں اور اس کے جواب میں لا کی قیمت نکالتے ہیں، یہ حل ترسیم کے اس نقطہ کو تعبیر کرتا ہے جہاں ترسیم محور لا سے ملتی ہے، ترسیم بنانے کے لئے یہی دو حل یا نقطے کافی ہیں۔

پس سہولت کی خاطر خطی مساوات کی ترسیم بنانے میں مساوات سے آن نقطوں کے محدود معلوم کئے جاتے ہیں جہاں یہ محوروں کو قطع کرتی ہے، پھر ان نقطوں کو مرسم کرنے اور ملا کرنے سے ترسیم حاصل ہوتی ہے، لیکن اگر یہ نقطے پایہ اور محدودوں کی مقدار وغیرہ کے لحاظ سے مناسب نہ ہوں تو کوئی اور دو نقطے معلوم کرنے چاہئیں۔

مساوات لا = ۱۲ - ۲ = ۰ کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے۔ جہاں یہ خط محور لا سے ملتا ہے اس نقطہ کا معین لا = ۰ اور مساوات سے لا = ۲ = ۰ یعنی لا = ۲

پس محور لا اور خط مطلوب کا نقطہ تقاطع (۰، ۲) ہے۔

اسی طرح جہاں یہ مستقیم خط محور ما سے ملتا ہے اس نقطہ کا لا = ۰ اور مساوات ہے لا = ۱۲ - ۲ = ۰ یعنی لا = ۱۲، پس محور ما پر کا وہ نقطہ جس میں سے خط مطلوب گزرتا ہے (۱۰، ۱) ہے، صرف ان دو نقطوں (۰، ۲) اور (۱۰، ۱) کو مرسم کرنے سے ترسیم حاصل ہو سکتی ہے، اسی طرح جہاں لا + ۵ = ۴ = ۰ کی ترسیم محور لا

ضروری ہے،

ہم فرض کرتے

ہیں کہ دونوں

مخوروں پر ایک

چھوٹا حصہ

$= 62$ یعنی

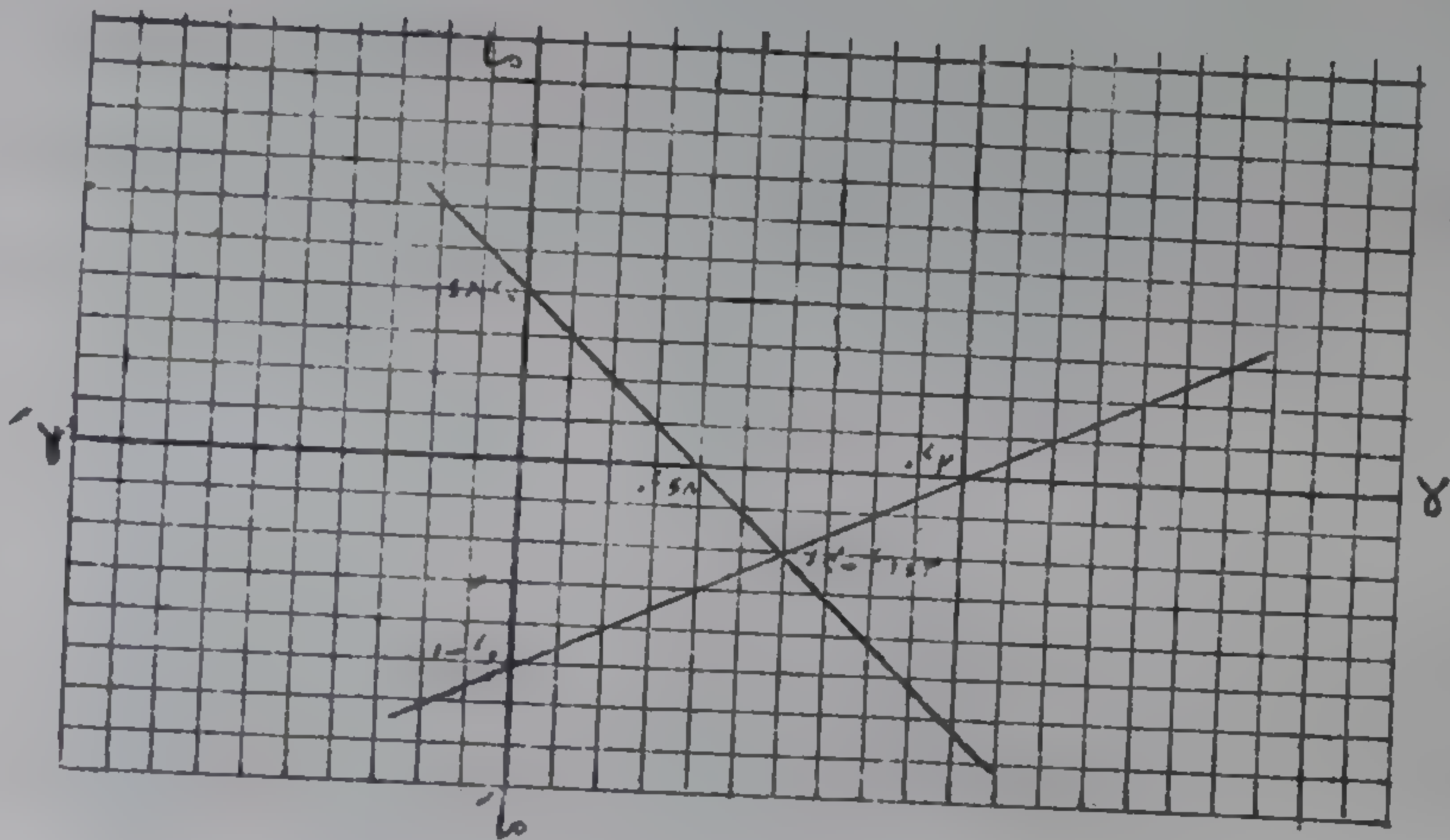
۵ چھوٹے حصے

۱ = اس بیانہ

پیر ساتھ کی شکل

بنائی گئی ہے۔

تریموں کا نقشہ



پیشانی ۵ = ۱

تقاطع (۱۷۲، ۱۷۳) ہے اور یہی مساواتوں کا مطلوبہ حل ہے۔

(ب) مساواتوں } $x - 3 = 2 + 2x$
 $2x - 3 = 1 - 5 + 2x$

(۱) کا تریسیمی حل

(۲)

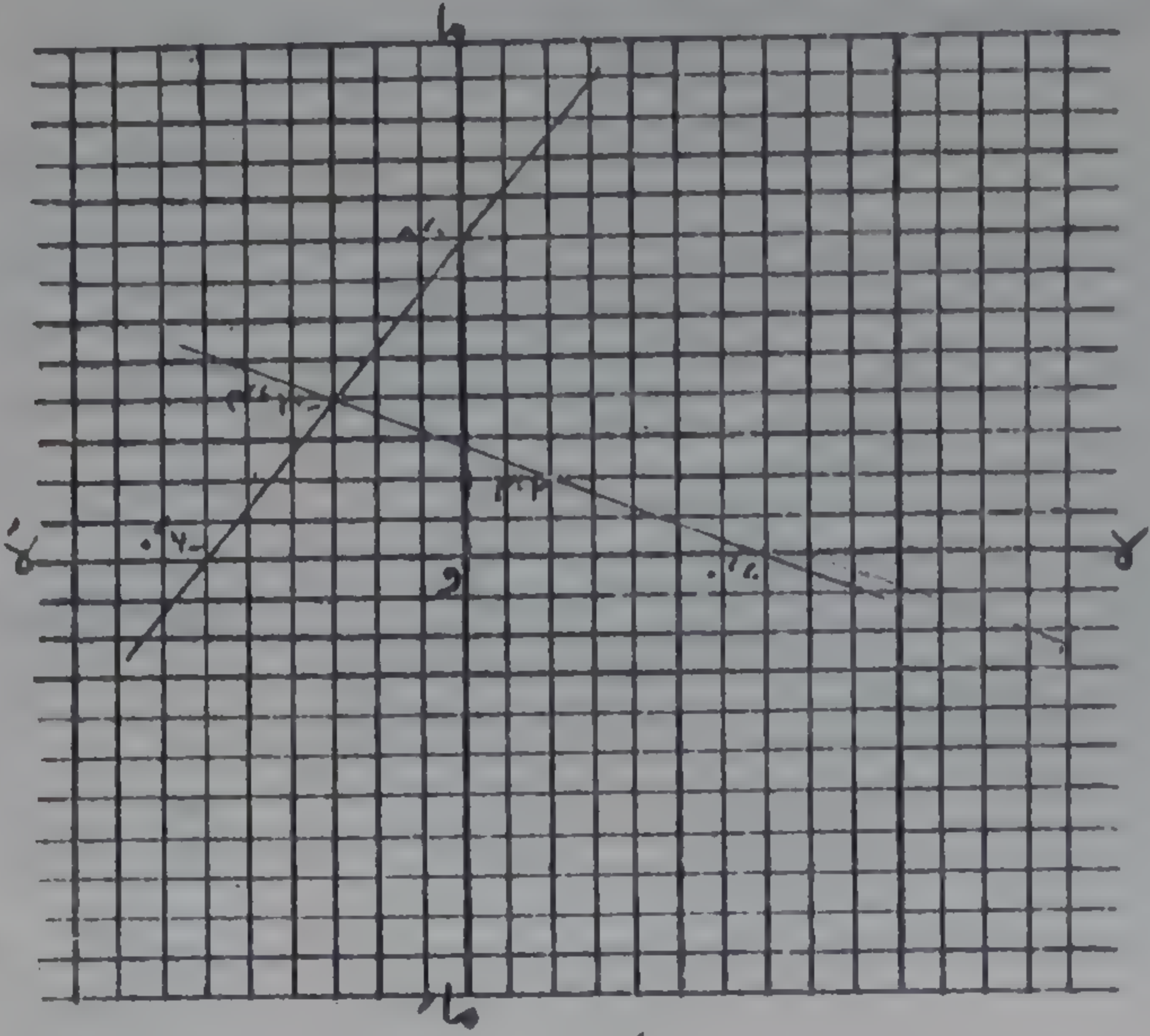
یہ دونوں خطی مساواتیں ہیں اس لئے ان کی تریسیمیں مستقیم خط ہونگی اور مستقیم خط کے محل کے لعتین کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں دیکھو متبادل ثبوت حصہ ۱، اس لئے ہم ہر تریسیم پر کے صرف دو نقطے معلوم کر بیٹھے۔

جہاں (۱۱) کی ترسیم محور کا سے ملتی ہے اس نقطہ کے محدد (۰، ۶) ہیں
 جہاں (۱۱) کی ترسیم محور کا سے ملتی ہے اس نقطہ کے محدد (۸، ۰) ہیں
 پس (۱۱) کی ترسیم نقاط (۰، ۶) اور (۸، ۰) کو مرسم کرنے اور ملا کر
 سے حاصل ہوتی ہے۔

دوسری مساوات $12 + 15 - 12 = 0$ کی ترسیم محاور لا اور صا کو

بالترتیب نقاط (۰، ۱۴) اور (۱۰، ۱۴) پر قطع کرے گی۔

اب دوسرے نقطہ میں ایک محدود کی قیمت مقرر ہے اس لحاظ



سے مرسم کرنے کے لئے یہ نقطہ ایسا موزوں نہیں، اس لئے اس مساوات کی ترسیم پر ہم ایک اور نقطہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں جس کے محدود صحیح عدد ہوں، اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$۲ = ۱۴ - لا$ اور اس میں لا کو مسلسل مثبت، منفی صحیح قیمتیں دینے سے ہم ما کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو صحیح ہوں مثلاً اگر $لا = ۲$ تو $۲ = ۲$ اور اگر $لا = ۶$ تو $۶ = ۶$ ۔ یہ سب عمل زبانی ہو سکتا ہے۔

پس دوسرے خط پر دو نقطے (۲، ۲) اور (۰، ۶) ہیں، ان کو شکل میں مرسم کر کے مساوات کی ترسیم بنائی گئی ہے۔

دونوں ترسیموں کے نقطہ تقاطع کے محدود (۳، ۴) ہیں

پس $لا = ۳$ ، $ما = ۴$ دونوں مساواتوں کا حل ہے۔

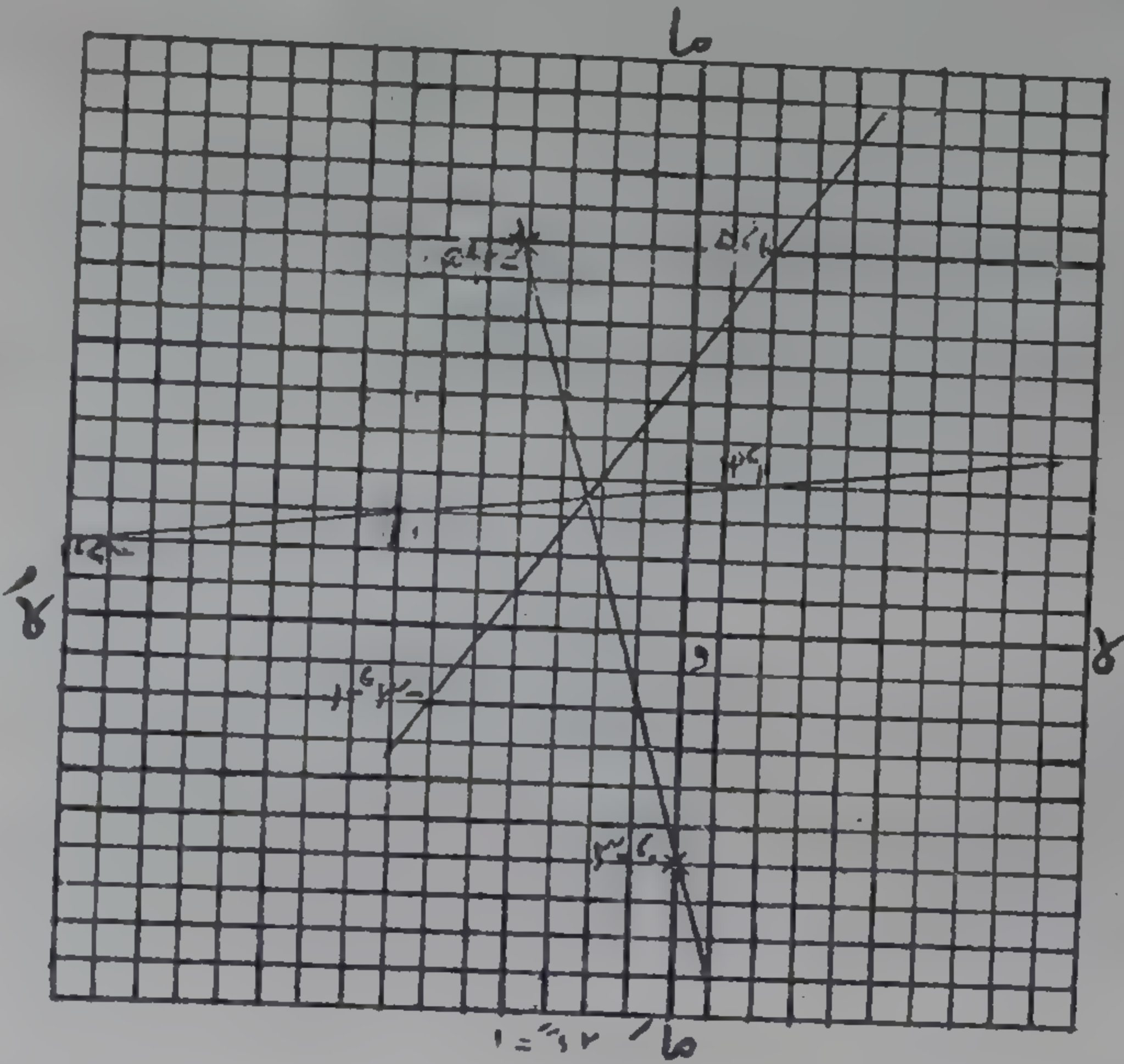
(ج) ذیل کی تین مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ اور ثابت کرو کہ یہ ایسے تین خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، اس نقطہ کے محدود معلوم کرو۔

$$۳ لا - ۲ ما = ۷ \quad (۱)$$

$$۴ لا + ما = ۱۰ \quad (۲)$$

$$لا - ۸ ما = ۱۵ \quad (۳)$$

یہ خطی مساواتیں ہیں اس لئے ان کی ترسیمیں مستقیم خط ہونگی۔ پہلی مساوات
 $\frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲$ کی ترسیم پر دو نقطے (۵، ۱) اور (۳، -۱) ہیں۔



دوسری مساوات

$$\frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲$$

ترسیم پر دو نقطے

(۳، -۱) اور

(۵، ۱) ہیں۔

تیسری مساوات

$$\frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲$$

ترسیم پر دو نقطے

(۲، ۱) اور (۴، -۱) ہیں۔

ان نقطوں

کو مرتب کرنے سے مساواتوں کی ترسیمیں بنائی گئی ہیں اور یہ تینوں ایک نقطہ

میں سے گزرتی ہیں جس کے محدود قریب قریب (۱، ۱) ہیں۔

۱۹۔ خطی ہمزاد مساواتوں کے حل کے متعلق دو تین باتیں توجہ طلب ہیں۔

(۱) ایک متغیر کی مساوات درجہ اول کے حل کو ہم دو خطی ہمزاد

مساواتوں کے حل پر متوقف کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ $\frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲$

$\frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲$ کو (۱) کی طرحی طریق پر حل کرنا مطلوب ہے یعنی مجہول مقدار

لا کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنا ہے کہ طرفین مساوات ایک دوسرے کے

مساوی ہو جائیں۔

اب $\frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲$ سے جو ربط مساوات مفہوم ہوتا ہے اس کو

ہم ان دو ہمزاد مساواتوں $\left\{ \begin{array}{l} \frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲ \\ \frac{۳۳ + ۷۲}{۲} = ۷۲ \end{array} \right.$ (۲) سے ظاہر کر سکتے ہیں،

ان دو مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرنے سے لا، ما کی جو قیمتیں لا، ما ملینگی وہ اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گی یعنی $\left\{ \begin{array}{l} \frac{23+14}{3} = 11 \\ \frac{14-13}{5} = 1 \end{array} \right\}$ پس لاکھ قیمت لا، ایسی ہوگی کہ $\frac{23+14}{3} = \frac{14-13}{5}$ کیونکہ ان جملوں میں سے ہر ایک ایک ہی مقدار ما کے مساوی ہے یعنی لا مساوات (۱) کا مطلوبہ حل ہے اور یہ مساواتوں (۲) کی ترسیموں کے نقطہ تقاطع کا فصلہ ہے۔

پس (۱) کو ترسیمی طریق پر حل کرنے کے لئے مساواتوں $\left\{ \begin{array}{l} \frac{23+14}{3} = 11 \\ \frac{14-13}{5} = 1 \end{array} \right\}$ کی ترسیمیں بناؤ، ان کے نقطہ تقاطع کا فصلہ (۱) کا حل ہوگا۔

نوٹ۔ دفعہ گزشتہ کے حصہ (ب) میں مساواتوں $\left\{ \begin{array}{l} \frac{23+14}{3} = 11 \\ \frac{14-13}{5} = 1 \end{array} \right\}$ کو ترسیمی طریق

پر حل کر کے لا، ما کی قیمتیں معلوم کی گئی ہیں یعنی $\left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \right\}$ ، نقطہ تقاطع کے محدود ہیں اور فصلہ لا، ما، اب ہم اس کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ لا کی جگہ ۳ رکھنے سے طرفین

مساوات $\frac{23+14}{3} = \frac{14-13}{5}$ مساوی ہو جاتی ہیں کیونکہ $\frac{23+(3-1)}{3} = \frac{14-13}{5}$

جو نقطہ تقاطع کے معین کی قیمت ہے اور $\frac{14-13}{5} = \frac{(3-1)}{5} = 1$ جو نقطہ تقاطع کے معین ما کی قیمت ہے۔

اسی طرح ہم مساوات $5 + 3 = 8$ کے حل کو دو ہزار مساواتوں

$\left\{ \begin{array}{l} 5 + 3 = 8 \\ 5 + 3 = 8 \end{array} \right\}$ کے حل پر موقوف کر سکتے ہیں، ما $5 + 3$ کی ترسیم ایک

مستقیم خط ہے اور ما = ۰ کی ترسیم محور لا ہے، جہاں ما $5 + 3$ کی ترسیم محور لا سے ملتی ہے وہی ان کا نقطہ تقاطع ہے، اس نقطہ کا فصلہ یعنی لا محدود مساوات $5 + 3 = 8$ کا حل ہے۔

(۲) اگر دو ہندسہ مساواتیں غیر مطابق ہوں تو ان کا کوئی محدود حل حاصل

نہیں ہو سکتا مثلاً $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ غیر مطابق ہیں کیونکہ یہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \dots \dots \dots (1)$$

طالب علم جیسے طریق سے کوشش کر کے دیکھ لے کہ لا، ما کی قیمتوں کا کوئی ایسا جوڑا معلوم نہیں ہو سکتا جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کر سکے، نیز چونکہ ایسا جوڑا ان کی ترسیموں کے نقطہ تقاطع کے محدودوں کو تعبیر کرتا ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ ان کی ترسیمیں ایک دوسرے کو قطع نہیں کرینگی یعنی متوازی ہونگی اور یہ امر مساواتوں کی شکل (۱) سے ظاہر ہے۔

(۳) یہ بھی ضروری ہے کہ ہندسہ مساواتیں جن کا حل مطلوب ہے

ایک دوسرے پر منحصر یا موقوف نہ ہوں مثلاً $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ ایک

دوسرے پر منحصر ہیں کیونکہ دوسری مساوات پہلی کو ۴ سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے۔ دونوں صورتوں میں لا، ما کی قیمتوں کے لامتناہی جوڑے جو مساواتوں کو پورا کرتے ہیں وہی ہونگے، ترسیمی نقطہ نظر سے یہ مساواتیں دو ایسے مستقیم خطوں کو تعبیر کریں گی جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے مشترک نقطوں کی تعداد لامتناہی ہے۔

۲۔ اب تک ہمیں دو متغیروں کی ایک مساوات درجہ اول دی ہوئی تھی جس کے حل معلوم کرنے اور ان کو مرتبہ کرنے سے ہم نے اس کی ترتیب معلوم کی۔ اب برعکس اس کے ایک مستقیم خط دیا ہوا ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس خط پر کس سبب نقطوں کے محدود کس مساوات کو پورا کرتے یا بالفاظ دیگر اس خط کی مساوات مطلوب ہے۔

اب تک جتنی مثالیں ہم نے حل کی ہیں ان میں ہم نے دیکھا کہ خطی

مساوات کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے اور ایک مستقیم خط پر کے سب نقطے ایک خطی مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس بنا پر ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مفروضہ خط کی مساوات بھی ایک خطی مساوات ہے۔

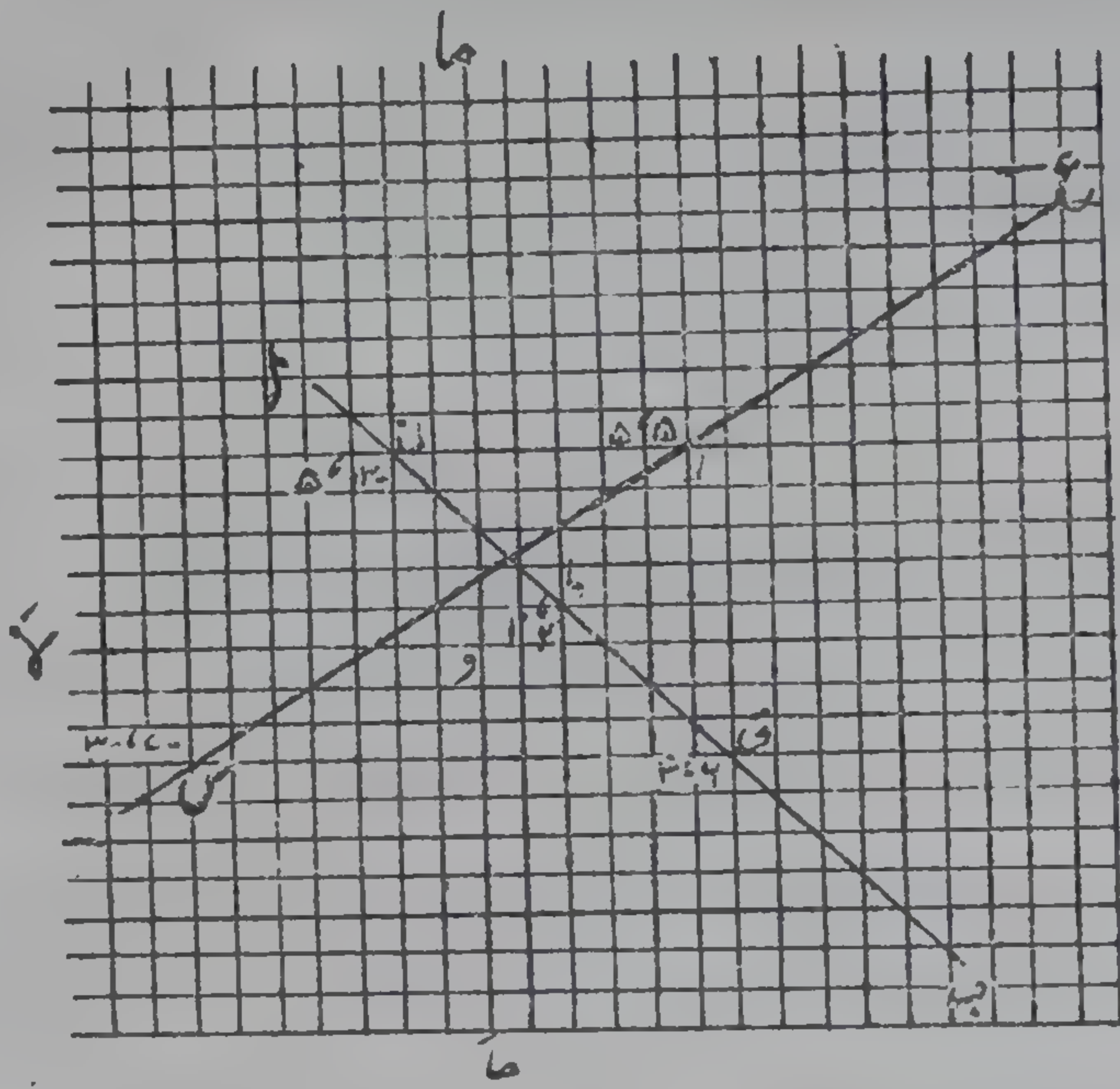
اب تمام خطی مساواتیں اس مساوات $م = لا + ج$ میں شامل ہیں کیونکہ $م$ اور $ج$ کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے ہم اس قسم کی جو مساوات چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، پس مفروضہ خط کی مساوات $م = لا + ج$ ہے جہاں $م$ اور $ج$ کی وہ قیمتیں جو اس خط کے ساتھ مخصوص ہیں معلوم کرنا باقی ہیں۔

اس غرض کے لئے خط مفروض کو دیکھنا چاہیے، اگر یہ کاغذ پر کھینچا ہوا ہو یا اس کے ایسے اجزاء (مثلاً دو نقطے یا ایک نقطہ اور زاویہ میلان کسی ثابت خط سے) معلوم ہوں جن کے ذریعے سے یہ کھج سکے تو بلحاظ کسی مناسب محوروں کے ہم اس خط پر کے دو نقطوں کے محدود معلوم کر سکتے ہیں، اب یہ محدود مساوات $م = لا + ج$ کو پورا کریں گے کیونکہ حسب مفروض یہ اس کی مساوات ہے، پس اگر ان نقطوں کے محدودوں کو اس مساوات میں مندرج کیا جائے

تو ہم اور $ج$ کی رقوم میں نہیں دو ہزار مساواتیں ملیں گی جن کو جبریہ طریق پر حل کرنے سے ہم $م$ اور $ج$ کی مطلوبہ قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں دیکھو

مثلاً ذیل

(۱) شکل ہذا میں



دو خطوط مستقیم اب اور ع د کھینچے گئے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔
 کاغذ کی سطح پر دو متقاطع علی القوائم محور لا لا، ما ما کھینچو اور خط
 اب پر کے دو نقاط ن، ق کے محدود شکل سے بلحاظ ان محوروں
 کے معلوم کرو۔ ن کے محدود (۲، ۵) ہیں اور ق کے (۶، ۳) اس خط
 پر اور جتنے نقطے ہیں ہم ان سب کے محدود معلوم کر سکتے ہیں لیکن ہمارے اغراض
 کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں۔

اب چونکہ اب ایک مستقیم خط ہے اس کی مساوات لازماً ایک خطی
 مساوات ہوگی، فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ $ما = م + لا + ج$ ہے اب پر کے
 سب نقطے اس مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس لئے نقطہ ن کے محدود
 $لا = ۲، ما = ۵$ اس کو پورا کریں گے، ان کو مندرج کرنے سے $۵ =$
 $۲ + م + ج$ ۔۔۔۔۔ (۱)

اسی طرح ق کے محدود $لا = ۶، ما = ۳$ مساوات $ما = م + لا + ج$ کو پورا کرتے
 ہیں پس $۳ = ۶ + م + ج$ ۔۔۔۔۔ (۲)

تفریق کرنے سے $۸ = ۸ - م$ یعنی $م = ۰$ اور $ج = ۳ + ۵ = ۸$ ۔
 پس اب کی مساوات $ما = لا + م$ یعنی $ما = لا + ۰ = لا$ ہے۔

اس کی تصدیق کے لئے اب پر کوئی اور نقطہ ط لو اس کے محدود
 (۲، ۱) ہیں اور یہ مساوات کو پورا کرتا ہے، اسی طرح اس خط پر کے اور سب
 نقطوں کے محدود اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

بعینہ ایسے عمل سے ع د کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے، اس پر
 کوئی دو نقطے ر، س لو، کوشش یہ ہونی چاہیئے کہ ان نقطوں کو لیا جائے
 جن کے محدود پیمانہ کے لحاظ سے حتی الوسع صحیح عددوں سے تعبیر ہوں، فرض کرو
 کہ ع د کی مساوات $ما = م + لا + ج$ ہے، نقاط ر (۵، ۵) اس (۵، ۳)

اس کو پورا کرتے ہیں یعنی $۵ = ۵ + م + ج$ { تفریق کرنے سے $۰ = ۰ + م$ یعنی

$م = ۰$ اور $ج = ۵ - ۵ = ۰$ ، پس ع د کی مطلوبہ مساوات

$$۱ = \frac{۲}{۳} + \frac{۵}{۳} \text{ یعنی } ۲ - ۱۱ + ۳ = ۵ = ۰ \text{ ہے}$$

۶ =	۴ =	۰	۲	= ۱۱
۳۵ =	۲ =	۳	۵۵	= ۱

(ب) ثابت کرو کہ نقاط

ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس خط کی مساوات معلوم کرو۔
ان میں سے کسی دو نقطوں کو مرتسم کرنے اور ملائے سے ایک مستقیم خط حاصل ہوگا، مثلاً دوسرے اور تیسرے نقطہ کو ملائے والا خط ل ب کھینچو،

پہلے اور چوتھے نقطہ
کو مرتسم کر دینے سے
اس خط پر واقع ہیں
دیکھو شکل۔

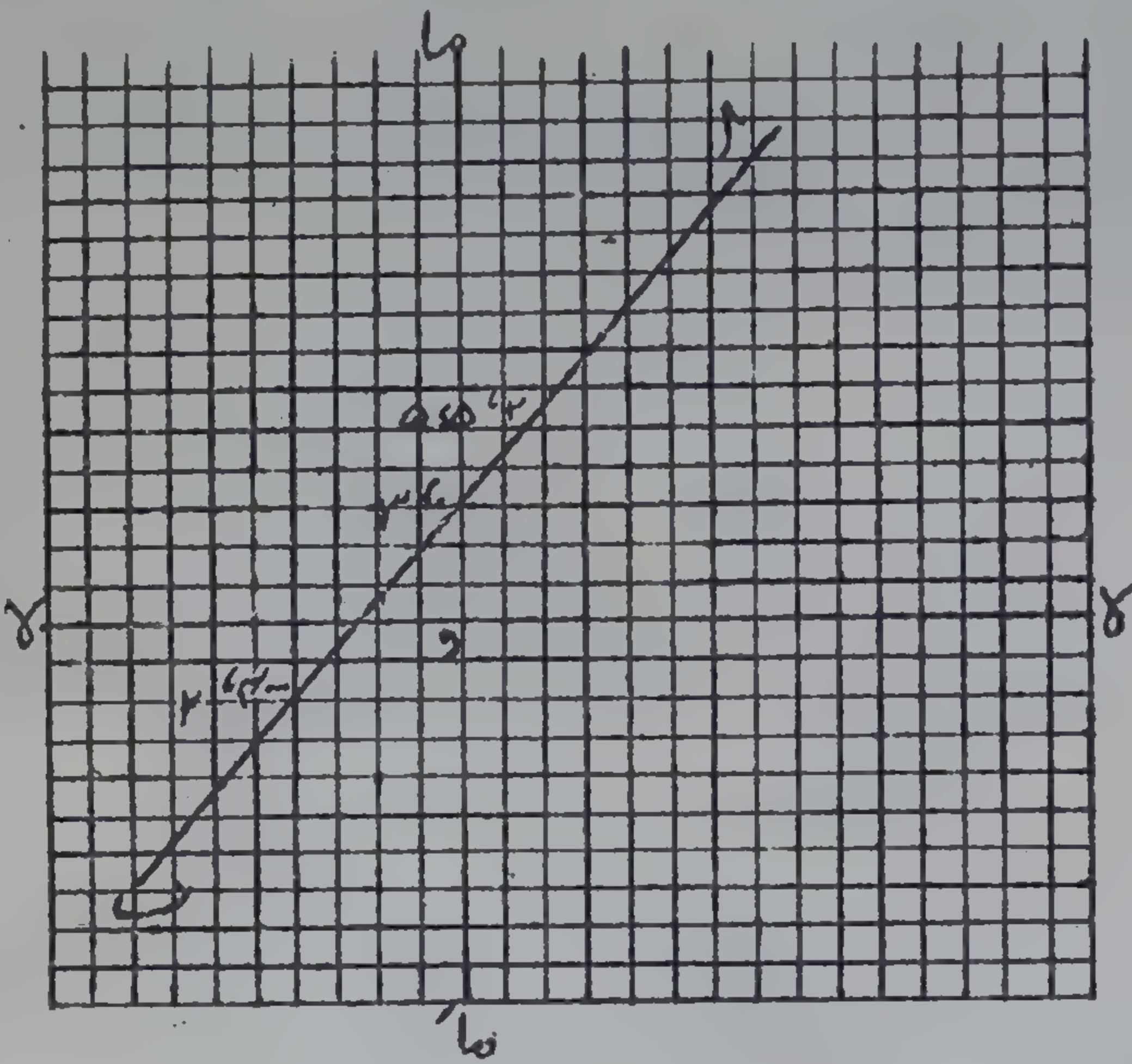
فرض کرو کہ

دوسرے اور تیسرے
نقطوں کو ملائے والے
خط کی مساوات
 $۱ = ۴ + ۵$ ہے۔

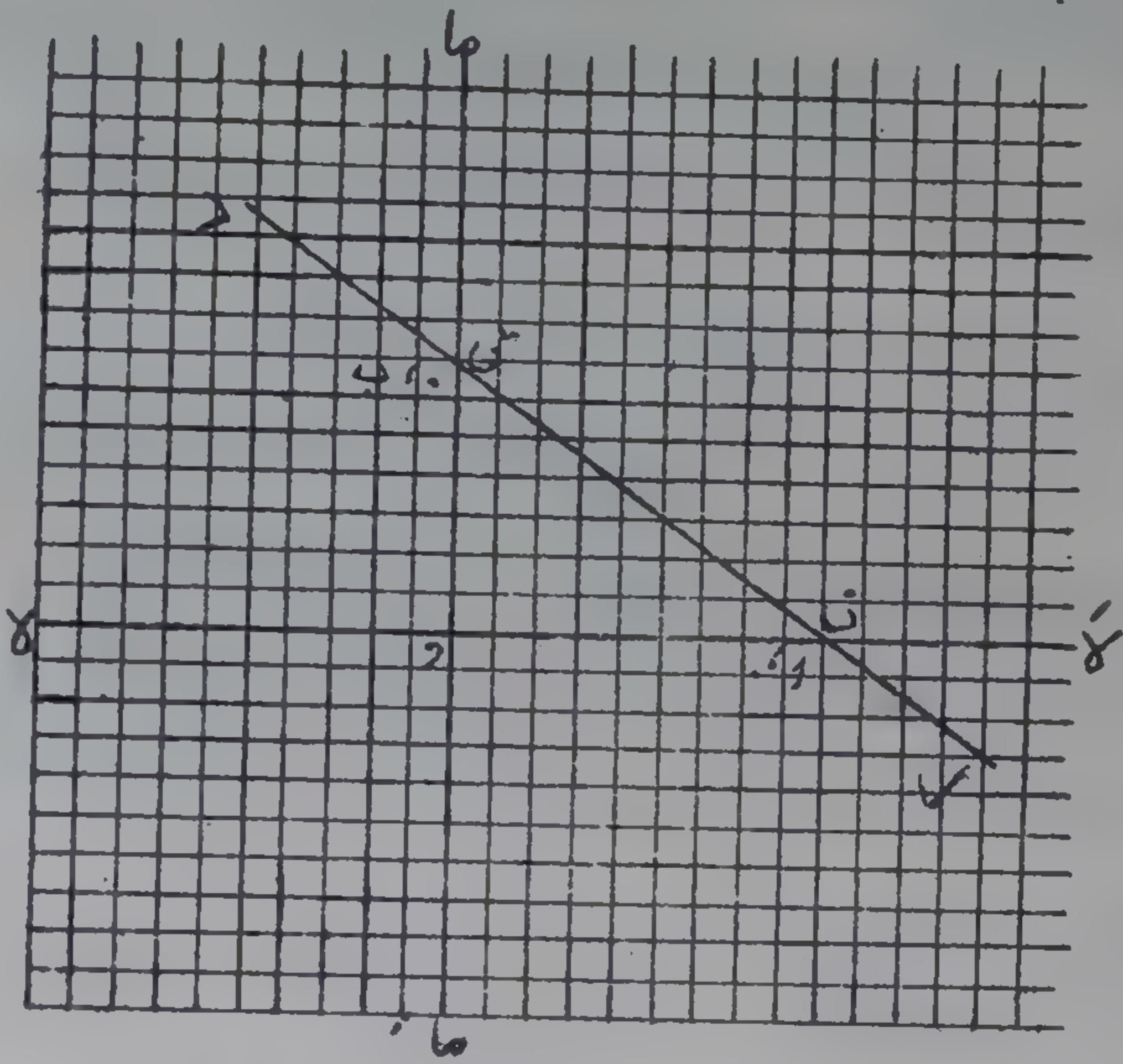
ان نقطوں

کے محدود مندرج کرنے سے $۳ = ج$ اور $۲ = ۴ - ج$ یعنی $۴ = ۵ - ج$ ،
پس ل ب کی مساوات $۱ = \frac{۵}{۳} + ۳$ یعنی $۵ - ۱۱ + ۳ = ۰$ ہے۔
نقطہ (۲، ۵۵) اس کو پورا کرتا ہے کیونکہ $۲ \times ۵ - ۵ \times ۵ + ۱۱ = ۰$ ۔
اسی طرح نقطہ (۶، ۳۵) بھی اس مساوات کو پورا کرتا ہے۔

پس اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ کوئی نقطہ ایک مساوات کی ترکیب پر واقع ہوتا ہے
یا نہیں تو اس کے لئے یہ ضروری نہیں کہ مساوات کی ترکیب بنائی جائے اور
پھر نقطہ کو مرتسم کرنے سے معلوم کیا جائے کہ واقعی یہ ترکیب پر ہے یا نہیں،
اس امر کے لئے صرف اتنا کافی ہے کہ ہم نقطہ کے محدود مساوات میں مندرج



کریں، اگر اس طرح مساوات پوری ہو جائے تو سمجھ لینا چاہیے کہ نقطہ مساوات کی ترکیب پر واقع ہوتا ہے ورنہ نہیں۔
۲۱۔ اگر ایک خط مستقیم محاور لا اور ما کو ایسے نقطوں پر کاٹے جن کے فاصلے مبداء سے بالترتیب ۱ اور ۲ ہوں تو اس کی مساوات ان مابین حصول کی رقوم میں اس طرح معلوم ہو سکتی ہے۔



فرض کرو کہ
خط لا و ما محوروں کو
نقاط ن اور ق پر
کاٹتا ہے جہاں
ون = ۱، اور
وق = ۲،
اب نقطہ
ن کے محاور (۱، ۰)
ہیں اور ق کے
(۰، ۲)۔

فرض کرو کہ مستقیم خط لا و ما کی مساوات ما = لا + ج ہے جہاں م اور ج کی قیمتیں ۱ اور ۲ کی رقوم میں مطلوب ہیں،
اب چونکہ یہ خط نقاط (۱، ۰) اور (۰، ۲) میں سے گزرتا ہے اسلئے

$$۰ = لا + ج \text{ اور } ۲ = ۰ + ج$$

$$ج = ۲ \text{ اور } لا = -۲$$

$$پس مساوات مطلوبہ ہوئی ما = -۲ + لا + ۲$$

$$یعنی ما + ۲ = لا + ۲$$

$$طرفین کو ۲ پر تقسیم کرنے سے $\frac{ما}{۲} + ۱ = \frac{لا}{۲} + ۱$ (۱)$$

$$\text{یعنی} \quad 1 = \frac{لا}{ون} + \frac{ما}{وق}$$

مشق ۱۔ جو خط محاور لا، ما پر بالترتیب مابینی حصے۔ ۳، ۵ کا ٹٹا ہے اس کی مساوات

$$\frac{لا}{۳} + \frac{ما}{۵} = 1 \text{ یعنی } ۵ - لا - ۳ = ۱۵ + ۳ = ۱۸$$

مشق ۲۔ ان مساواتوں $\begin{cases} ۲ + لا + ۳ = ۰ \\ ۵ + لا + ۴ = ۰ \end{cases}$ کی ترتیبیں محاور پر جو حصے کاٹتی ہیں انہیں معلوم کرو اور مساواتوں کو مساوات (۱) کی صورت میں لاؤ۔

۲۲۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم خطی مساوات کے متعلق چند متفرق باتوں کا ذکر کرنا مناسب سمجھتے ہیں۔

(۱) خطی مساوات کی عام صورت $ما = لا + ج$ سے ہے اور یہ ایک مستقیم خط کو بقیر کرتی ہے، کسی ایک خط پر کے تمام نقطوں کے لئے $ما$ اور $ج$ مستقل رہتے ہیں صرف $لا$ اور $ما$ بدلتے ہیں، $ما$ کو ہم نے اس خط کا میلان یا ڈھال کہا ہے، یاد رہے کہ یہ زاویہ میلان نہیں ہے۔ اگر ایک مستقیم خط پر کے دو نقطے معلوم ہوں تو ان کے محدودوں کی برقوم میں خط کا ڈھال یعنی $ما$ معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ مفروضہ نقطے $(لا، ما)$ اور $(لا، ما)$ ہیں، چونکہ یہ خط پر ہیں اس لئے یہ اس کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

$$\text{یعنی} \quad \begin{aligned} ما &= لا + ج \\ ما &= لا + ج \end{aligned}$$

تفریق کرنے سے $لا - ما = لا - ما$ یعنی خط کا ڈھال $ما = لا$ (لا - لا) = ۰

اب چونکہ ایک خط کے لئے $ما$ مستقل، غیر متبدل چیز ہے جیسے ۲، ۳

غیر، اس لئے معلوم ہوا کہ ایک خط پر کے کسی دو نقطوں کے لئے نسبت $\frac{ما - لا}{لا - لا}$

یعنی $\frac{\text{لا کی بیشی}}{\text{ما کی بیشی}}$ ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔

اب اگر کسی نقطوں کے محدود دئے ہوئے ہوں اور یہ معلوم کرنا ہو کہ یہ ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں یا نہیں تو صرف یہ دیکھنا کافی ہوگا کہ نسبت $\frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} - \text{لا}}$ نقطوں کے ہر ایک جوڑے کے لئے وہی رہے یا نہیں۔

۶ -	۴ -	۰	۲	لا
۴۵ -	۲ -	۳	۵۵	ما

مثلاً سوال (ب) دفعہ میں جو نقطے

معلوم ہیں وہ سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں کیونکہ پہلے اور دوسرے نقطے کے لئے نسبت $\frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} - \text{لا}}$ کی قیمت $\frac{۲}{۴۵}$ یعنی $\frac{۲}{۴۵}$ ہے، پہلے اور تیسرے کے لئے $\frac{۶ - ۰}{۴۵ - ۲} = \frac{۶}{۴۳}$ ، دوسرے اور تیسرے اور چوتھے وغیرہ سب کے لئے یہ نسبت ایک ہی ہے۔

(۲) ایک عددی خطی مساوات $۲\text{لا} + ۳\text{ما} + ۴ = ۰$ ہے، اس کی عام صورت $۱\text{لا} + ۱\text{ب} + ۱\text{ما} + ۱ = ۰$ ہو سکتی ہے، بظاہر ان مساواتوں میں تین مستقل مقداریں ہیں لیکن فی الحقیقت دو ہیں کیونکہ ان کو بالترتیب ۳ اور ۱ ب پر تقسیم کرنے اور قلب سے یہ مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$۱ = \frac{۲}{۳}\text{لا} - \frac{۴}{۳}$$

$$۱ = \frac{۱}{۱}\text{لا} - \frac{۱}{۱}\text{ب}$$

جو $۱ = ۱\text{ما} + ۱\text{ب} + ۱\text{ج}$ میں شامل ہیں کیونکہ کسری رقوم $-\frac{۴}{۳}$ ، $-\frac{۱}{۱}$ ، $-\frac{۱}{۱}$

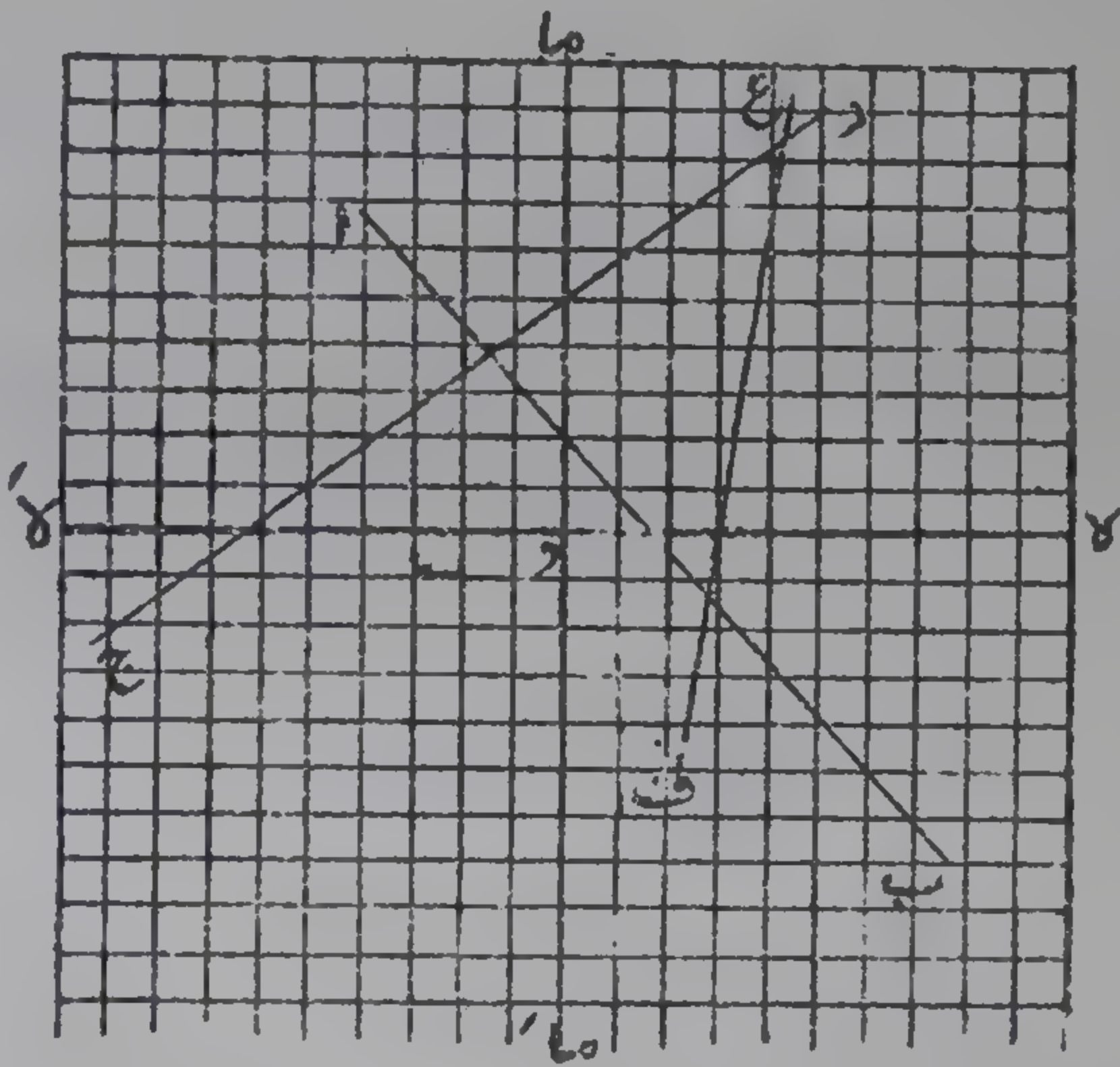
اکیلے حروف م اور ج سے تعبیر ہو سکتی ہیں جہاں ہر ایک حرف (م یا ج) کسی عدد مثبت یا منفی صحیح یا مکسور کے مساوی ہو سکتا ہے۔

۱۶۔ ایک ہی محور اور اکائیاں استعمال کرنے سے لا۔ ۲ + ما + ۳ = ۰، لا + ما + ۱ = ۰
 ۵ لا۔ ۱ = ۰ کی ترسیمیں بناؤ اور ان کی عدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (۱) \begin{cases} لا - ۲ + ما + ۳ = ۰ \\ لا + ما + ۱ = ۰ \end{cases} \\ (۲) \begin{cases} لا - ۲ + ما + ۳ = ۰ \\ لا - ۱ = ۰ \end{cases} \\ (۳) \begin{cases} لا + ما + ۱ = ۰ \\ لا - ۱ = ۰ \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

۱۷۔ سوال ۱۶ کے خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے راسوں کے محدود معلوم کرو۔

۱۸۔ ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں لا۔ ۱ + ما = ۰، لا - ۲ + ما + ۳ = ۰،
 لا + ۲ - ما - ۱ = ۰ ہیں، ترسیمی طریق سے اس کے راسوں کے محدود معلوم کرو۔



۱۹۔ ساتھ کی شکل میں خطوط

ا ب، ج د، ع ف
 کھینچے گئے ہیں، ان کی مساواتیں

معلوم کرو اور ہر خط پر ایک
 نقطہ لینے سے اپنے جواب

کی تصدیق کرو۔

۲۰۔ ان خطوط مستقیم کی

مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں

کے ازواج ذیل میں سے گزرتے ہیں

$$\begin{aligned} & (۱) (۳، ۵) (۳، -۴) \\ & (۲) (۴، ۴) (۲، -۴) \\ & (۳) (۳، ۳) (۳، -۵) \\ & (۴) (۴، ۴) (۴، -۳) \\ & (۵) (۵، ۴) (۵، -۳) \\ & (۶) (۲، ۳) (۲، -۵) \end{aligned}$$

نقاط ذیل کو مرسم کرو اور ہر صورت میں ترسیم کی مساوات معلوم کرو۔

۳ و ۳	۱ و ۵	۱ و ۲	۱	۳	۰ = لا
۵ و ۳	۲ و ۵	۲	۵/۳	۵	۰ = ما

۸	$3\frac{3}{4}$	۱۵۵	۰	۳	= ۷
$۷\frac{5}{4}$	۰	۳۶۵	$\frac{5}{4}$	۳۶۵	= ۱

-۲۲

۲۲- ثابت کرو کہ تین نقطے $(۱-۳)$ ، $(۲-۴)$ ، $(۵-۳)$ ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس خط کی مساوات معلوم کرو، نیز معلوم کرو کہ یہ محاورہ کلاں ما سے کہاں ملتا ہے۔

۲۳- ایک مثلث کے راس $(۰-۰)$ ، $(۲-۴)$ ، $(۸-۶)$ ہیں مثلث کے اضلاع اور ان کے وسطی خطوط کی مساواتیں معلوم کرو۔

۲۵- ایک مثلث کے راس $(۰-۰)$ ، $(۲-۴)$ ، $(۴-۶)$ ہیں، اضلاع اور وسطیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

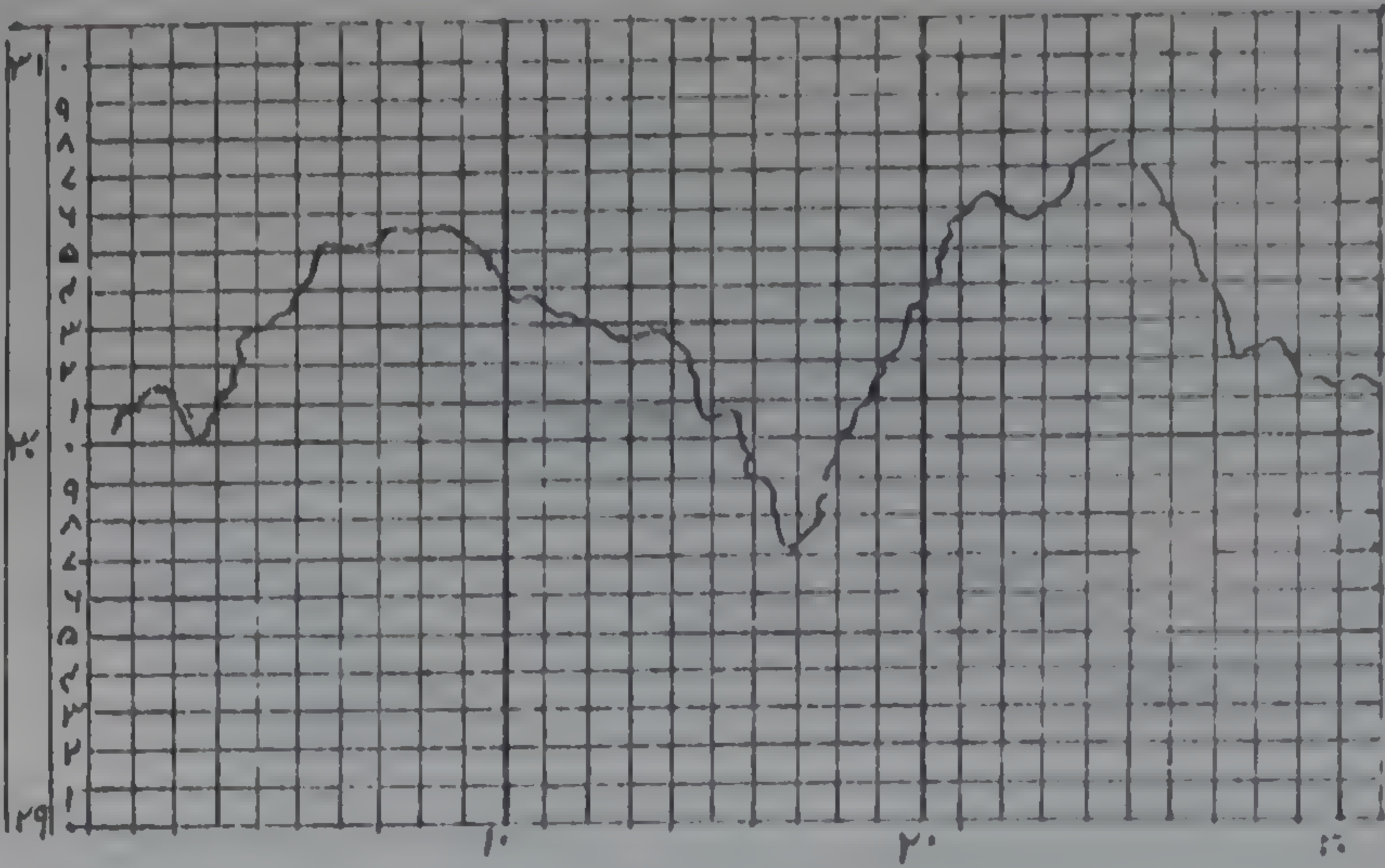


باب سوم

خطی کلیہ اور عام ترسیمیں

۲۳-۱ = ۲ لا + ۳ کی ترسیم بناتے وقت ہم نے دیکھا کہ لا اور ما متغیر ہیں اور باہم اس طرح متعلق ہیں کہ ایک کی کسی قیمت کے جواب میں دوسرے کی ایک تناظر قیمت ہے یا ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسرے میں ایک تناظر تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ نیز ان دو متغیروں کو بلحاظ دو محوروں کے ترسیم کرنے سے ہم نے ایک خط حاصل کیا جس میں لا، ما کی تمام تناظر قیمتیں فقط دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہیں اور اس بناء پر ترسیم کو صرف دیکھنے ہی سے یہ معلوم ہو سکتا ہے کہ ان دو متغیروں میں سے کسی ایک کے بڑھنے یا گھٹنے سے دوسرا متغیر بھی بڑھتا یا گھٹتا ہے، پس $۱ = ۲ لا + ۳$ کی ترسیم ایک ایسا خط ہے جس کے ذریعہ دو متعلقہ متغیرات لا، ما کے باہمی ربط کو ہندسی یا ترسیمی طریق پر ظاہر کیا گیا ہے۔

اب ضروری نہیں کہ یہ متغیر ایک خطی مساوات کی مجہول مقداریں ہی ہوں، متغیر کوئی ایسی مقدار ہے جو بدلے جیسے وقت، حیدر آباد کی آبادی، بارشیا میں پارہ کا ارتفاع، وغیرہ وغیرہ۔ ایسی کوئی دو بدلنے والی عام مقداریں باہم اس طرح متعلق ہو سکتی ہیں کہ ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسرے میں ایک تناظر تبدیلی پیدا کرے مثلاً بارشیا کے اندر مختلف اوقات پر پارہ کا ارتفاع بھی بدلے گا، پس اس صورت میں وقت اور پارہ کا ارتفاع دو ایسے متغیر ہیں جو باہم متعلق ہیں، ان کی تناظر قیمتوں کے کئی جوڑے ہونگے،



اگر وقت کو فصلہ اور تناظر ارتفاع کو سمیت مان کر نقطے مرسم کئے جائیں تو ان نقطوں میں سے ایک خط گزرے گا جو وقت اور ارتفاع کے باہمی ربط کو ترسیعی طریق پر ظاہر کرے گا دیکھو شکل بالا۔

عام طور پر یاد رہے کہ اگر کوئی دو مقداریں

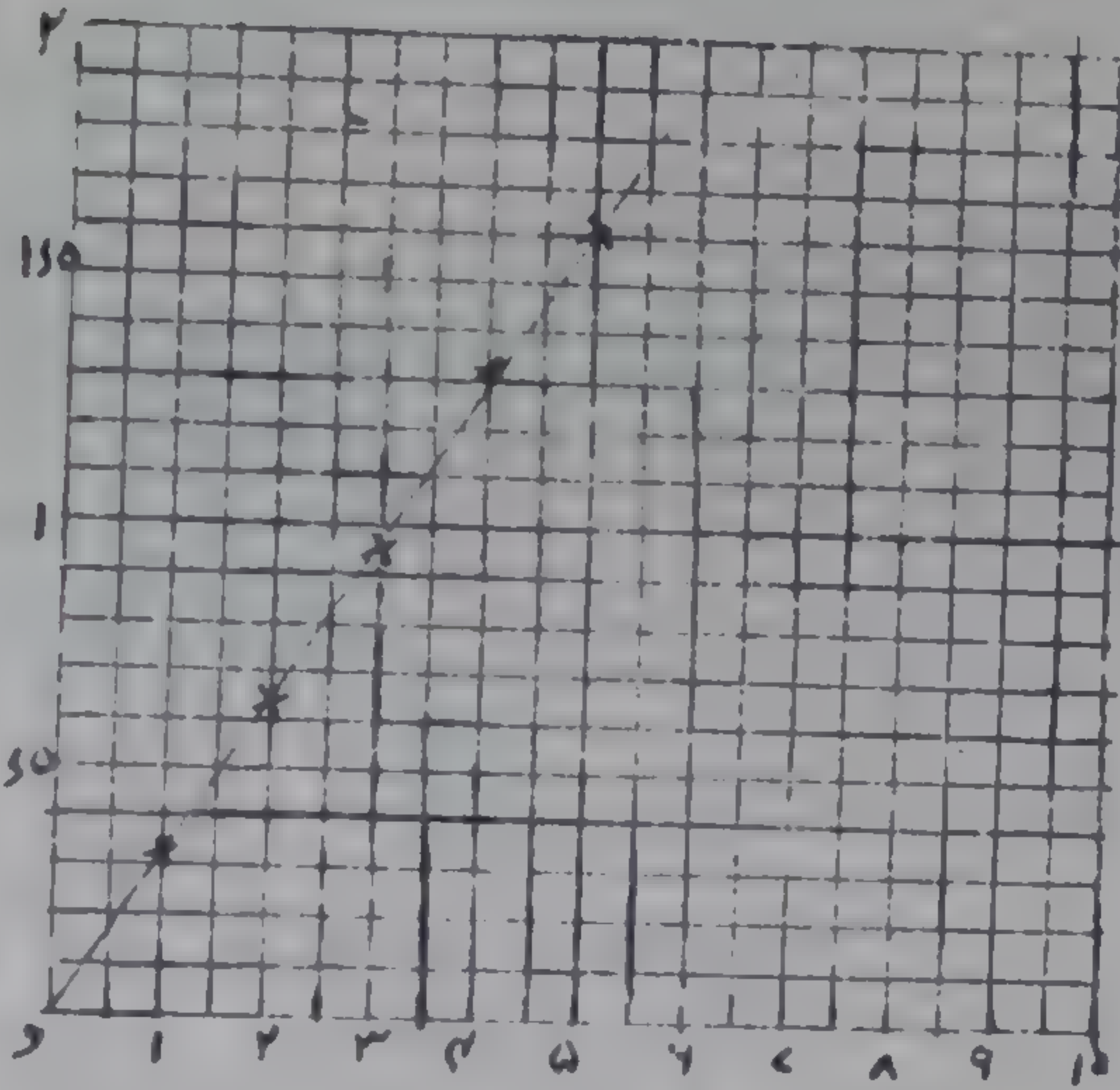
(۱) بدلتی ہوں یا مختلف قیمتیں اختیار کر سکیں
(۲) اور ان کی قیمتیں باہم متعلق ہوں یعنی ایک کی قیمت دوسری کی قیمت پر منحصر ہو

تو ان کے باہمی ربط کو ہم ترسیعی طریق پر ظاہر کر سکتے ہیں، یہ ضروری نہیں کہ ایسی مقداریں کسی مساوات سے یا حساب لگانے سے معلوم ہوں، اکثر اوقات یہ تجربہ اور مشاہدہ سے حاصل ہونگی۔

اب ایسا ممکن ہے کہ دو متعلقہ مقداروں کی تناظر قیمتوں کو مرسم کرنے سے جو نقطے حاصل ہوں وہ ایک مستقیم خط پر واقع ہوں یعنی ان مقداروں کا باہمی ربط ترسیعی طریق پر ایک مستقیم خط سے تعبیر ہو سکے، اس کو ہم یوں بیان کریں گے کہ ان مقداروں میں خطی کلیہ یا قانون پایا جاتا ہے مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک لوہے کی کمائی انتصابی سمت میں ایک ثابت نقطہ سے لٹکانی گئی ہے اور اس کے طول کو ناپ لیا گیا ہے، اس کے

بعد اس کے دوسرے سرے سے اوزان ایک پونڈ، ۲ پونڈ، ۳ پونڈ، ۴ پونڈ، ۵ پونڈ بالترتیب لگائے گئے ہیں اور ہر صورت میں کمائی کے طول کا اضافہ یعنی کھنچاؤ احتیاط سے ناپا گیا ہے، وزن اور کھنچاؤ کی قیمتیں جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

وزن پونڈوں میں	۰	۱	۲	۳	۴	۵	---
کھنچاؤ	۰	۵۳۲	۱۰۶۲	۱۵۹۵	۲۱۳۱	۲۶۶۶	---



کسی وزن کو فصل اور اس کے متناظر کھنچاؤ کو معین مان کر ساحتہ کی شکل میں نقطے مرتسم کئے گئے ہیں، یہ سب کے سب تقریباً ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گزرتا ہے، نحیف ساد تفاوت جو نظر آ رہا ہے اس کا باعث پیمائش کی

غلطی ہے پس وزن اور کھنچاؤ میں خطی کلیہ پایا جاتا ہے جس کی ہندسی تعبیر شکل میں موجود ہے اگلی تین دفعات میں ہم خطی کلیہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔ ان میں بالعموم دو متعلقہ متغیرات کی متناظر قیمتوں کے جوڑے حساب لگانے سے یا مشاہدہ یا تجربہ کی بناء پر معلوم ہونے کے، ان کو مرتسم کرنے سے کئی نقطے حاصل ہونگے جن میں سے ایک مستقیم خط گزرے گا جو ترسیعی طریق پر ان متغیرات کے باہمی ربط کو ظاہر کرے گا، نیز ہم اس مستقیم خط کی مساوات بھی معلوم کر سکیں گے دیکھو دفعہ ۲۰، یہ مساوات ان متغیروں کے ربط کی جبریہ صورت ہوگی۔

۲۴۔ علم حساب کی اکثر مثالیں ترسیعی طریق پر حل ہو سکتی ہیں لیکن اس طرح

کے جوابات محض تقریبی ہوتے ہیں، اکثر اوقات ان کے حل کرنے کے حسابی طریقے نہایت صاف اور مختصر ہوتے ہیں اور اس لحاظ سے قابل ترجیح ہیں، مگر ترسیات کی مزید توضیح کے لئے ہم اس جگہ حساب کی چند مثالیں ترسیمی طریق پر حل کریں گے۔

ہمیں خرید و فروخت کے معاملات میں روزانہ ایسی مقداروں سے واسطہ پڑتا ہے جو متغیر خیال کی جاسکیں اور باہم متعلق ہوں، مثلاً شکر ایک روپیہ کی تین سیر آتی ہے، اس سے یہ مراد ہے کہ یہ ۲ روپے کی ۶ سیر آئے گی، ۸ آنے کی ۱۶ سیر اور بالعموم ق روپوں کی ۸ سیر، دیکھو جدول ذیل۔

قیمت روپوں میں	۱	۲	$۲\frac{1}{۲}$	۳	۴	$۵\frac{1}{۲}$	ق
مقدار سیر میں	۳	۶	$۴\frac{1}{۲}$	۹	۱۲	$۱۶\frac{1}{۲}$	م

اب چونکہ شکر کی قیمت کے ساتھ ساتھ اس کی مقدار بھی بدلتی ہے، اس لئے ہم ان دونوں کو ایسے دو متغیر خیال کر سکتے ہیں جو باہم متعلق ہیں اور علاوہ انہیں ہم دیکھتے ہیں کہ کسی دو قیمتوں کی نسبت بالترتیب ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، مثلاً ۲ اور $۵\frac{1}{۲}$ کوئی دو قیمتیں

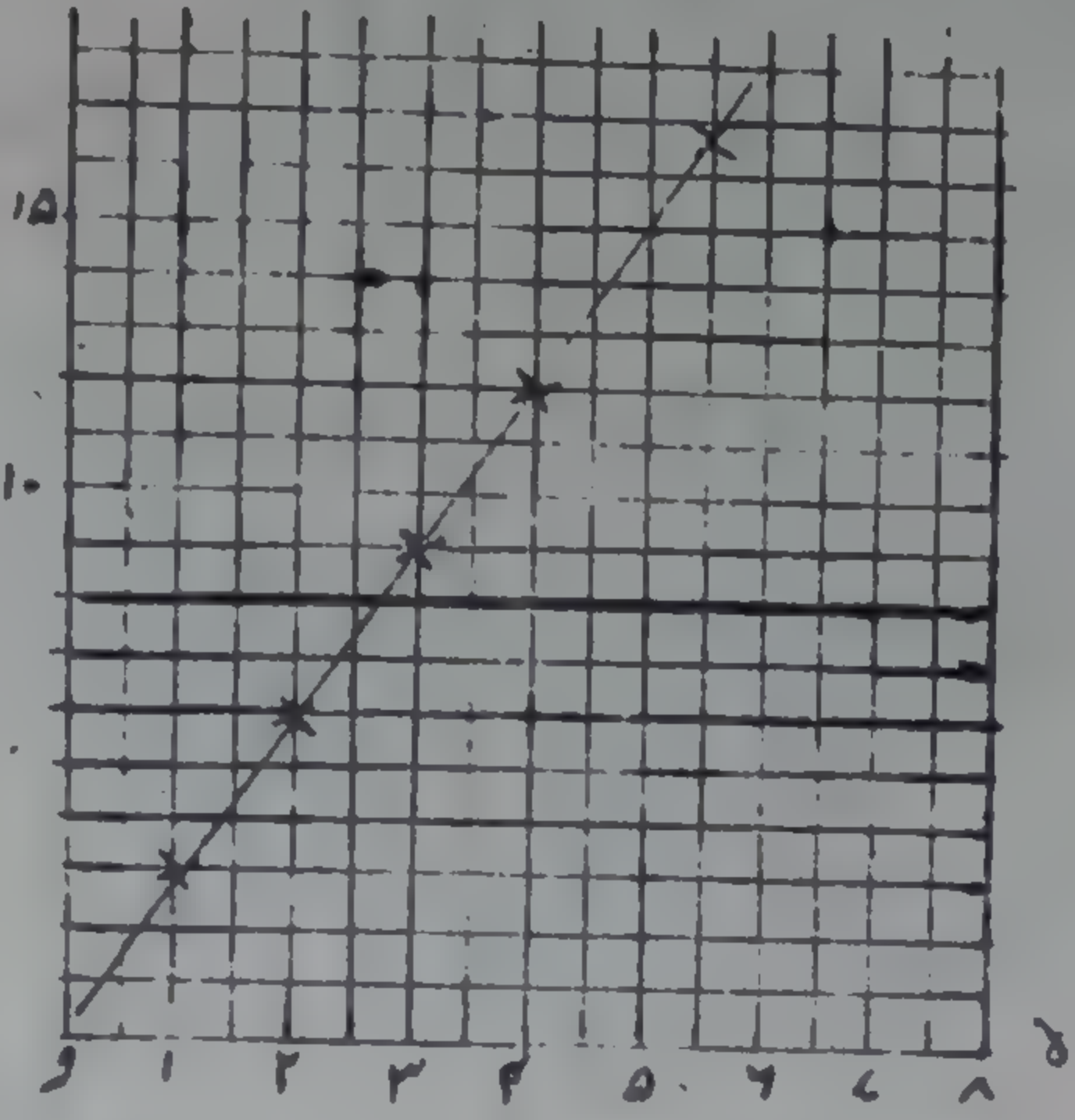
ہیں جن کی نسبت $\frac{۲}{۱۶\frac{1}{۲}}$ یعنی $\frac{۴}{۱۱}$ ہے، ان کی متناظر مقداریں بالترتیب ۶ اور

$۱۶\frac{1}{۲}$ ہیں جن کی نسبت $\frac{۶}{۱۶\frac{1}{۲}}$ یعنی $\frac{۱۲}{۱۱}$ یا $\frac{۴}{۱۱}$ ہے، طالب علم کوئی اور

زوج لیکر دیکھ لے کہ کسی دو قیمتوں کی نسبت ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، اس ربط کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ شکر کی قیمت اور مقدار متناسب ہیں یا ان میں سیدھا تناسب ہے۔

اب جدول بالا میں شکر کی قیمتوں کو فضلہ اور متناظر مقداروں کو معین مان کر ہم نقطے مرتب کر رہے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ یہ سب کے سب

نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، دیکھو ساتھ کی شکل۔



اب جبکہ شکر کی قیمت اور مقدار میں سیدھا تناسب تھا تو ہمیں معلوم ہوا کہ ان کے تغیرات کو ظاہر کرنے والی ترسیم ایک مستقیم خط ہے، ہم بالعموم یہ درست پائیں گے کہ جب کسی دو متعلقہ متغیروں میں سیدھا تناسب ہو تو اس طرح سے ان

کی جو ترسیم حاصل ہوگی وہ ایک مستقیم خط ہوگی

شکل بالا کا خط مستقیم شکر کی قیمت اور مقدار کے باہمی ربط کو ترسیم کرنے کا طریق پر ظاہر کرتا ہے، اس ربط کی جبریہ صورت جدول بالا سے $\frac{Q}{P} = \frac{Q_1}{P_1}$ ہوگی (جہاں Q قیمت ہے اور P مقدار) کیونکہ کسی دو قیمتوں کی نسبت ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، پس یہ جبریہ ربط $P = \frac{Q}{P_1} \times P_1$ ہوگا، طالب علم اس سے بخوبی مانوس ہے کیونکہ اگر قیمت لا اور مقدار مانا ہوتی تو یہ مساوات $P = \frac{Q}{P_1} \times P_1$ لا ہوتی جو مبداء میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

تعریف۔ بالعموم فرض کرو کہ کوئی دو متغیر A اور B ہیں جو باہم متعلق ہیں اور A کی کسی دو قیمتوں A_1 اور A_2 کے جواب میں B کی متناظر قیمتیں B_1

اور B_2 ہیں، اگر $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ یعنی A کی کسی دو قیمتوں کی باہمی نسبت B کی

متناظر قیمتوں کی نسبت کے مساوی ہو تو مختصراً ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ A اور B تناسب میں یا ان میں سیدھا تناسب ہے۔

علم حساب کے اکثر سوالات ایسی مقداروں پر مشتمل ہوتے ہیں جن میں سیدھا تناسب ہو مثلاً

(۱) کسی شے کی قیمت اور مقدار۔ ایک مثال اوپر حل کی گئی ہے۔
 (۲) فاصلہ اور وقت۔ ایک ریل گاڑی ایک گھنٹے میں ۳۰ میل جاتی ہے، ۲ گھنٹے میں ۶۰ میل، بالعموم لاگھنٹے میں ما میل یعنی $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳۰}$ یا ما = ۳۰ لا، مساوات درجہ اول، ترسیم مستقیم خط۔

(۳) سود۔ ۱۰۰ روپیہ کا سود ایک سال میں ۵ روپیہ، ۲۰۰ روپیہ کا ۱۰ روپیہ اور لا روپیہ کا ما روپیہ تب $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$ یعنی ما = $\frac{۱}{۱۰}$ لا، مساوات درجہ اول، ترسیم مستقیم خط وغیرہ وغیرہ۔

اب ہم حساب کی چند مشکل مثالیں ذیل میں حل کرتے ہیں۔
مشق ۱۔ حیدر آباد سے ایک موٹر دن کے ۸ بجے ۲۰ میل فی گھنٹے کی رفتار سے بیدر کی طرف روانہ ہوئی، بیدر کا فاصلہ حیدر آباد سے ۶۰ میل ہے۔ ایک ترسیم بناؤ جس سے فاصلہ طے کردہ اور وقت کا باہمی تعلق معلوم ہو۔ ظاہر ہے کہ ۸ بجے کے $\frac{۱}{۲}$ گھنٹے بعد موٹر کا فاصلہ طے کردہ حیدر آباد سے ۱۰ میل ہوگا، ایک گھنٹے کے بعد ۲۰ میل، $\frac{۱}{۲}$ گھنٹے کے بعد ۵۰ میل ... اور بالعموم لاگھنٹے کے بعد ما میل دیکھو جدول

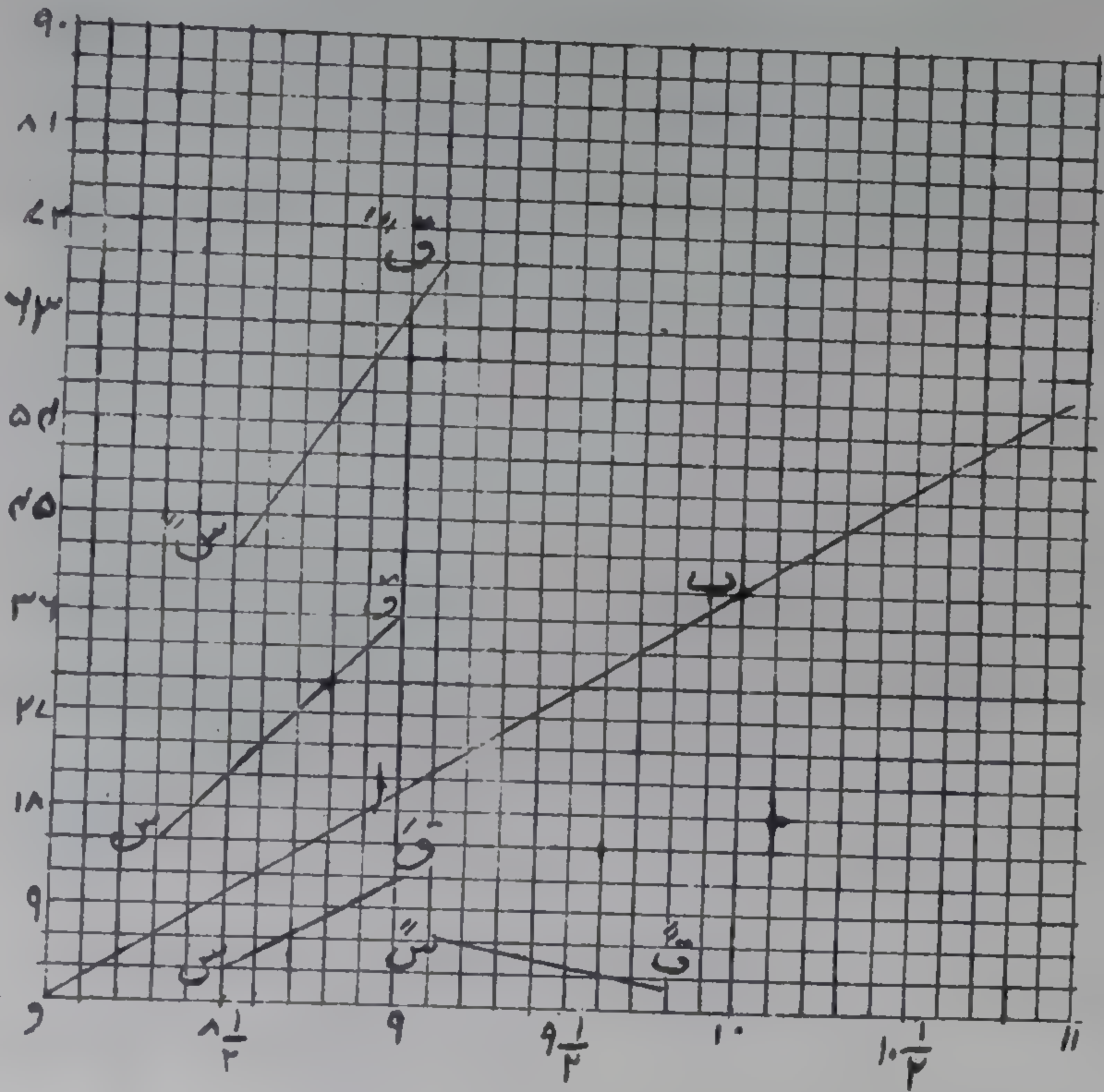
وقت ۸ بجے کے بعد .	$\frac{۱}{۲}$ گھنٹے	۱ گھنٹے	$\frac{۱}{۲}$ گھنٹے	۲ گھنٹے	$\frac{۱}{۲}$ گھنٹے	لاگھنٹے
فاصلہ طے شدہ .	۱۰ میل	۲۰ میل	۳۰ میل	۴۰ میل	۵۰ میل	ما میل

ہم دیکھتے ہیں کہ وقت اور فاصلہ میں سیدھا تناسب ہے اس لئے ضروری ہے کہ وقت اور فاصلہ کے تغیرات کو ظاہر کرنے والی ترسیم ایک مستقیم خط ہو۔

نیز چونکہ لاگھنٹے میں ما میل فاصلہ طے ہوتا ہے اس لئے $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۵}$ یعنی ما = ۲۰ لا

یعنی فاصلہ اور وقت کا باہمی ربط جبریہ طریق پر مساوات ما = ۲۰ لا سے تعبیر ہوتا ہے اب چونکہ یہ ایک مساوات درجہ اول ہے اس لئے اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہوگی، پس فاصلہ اور وقت کا باہمی ربط ہندسی طریق پر ایک سیدھے خط سے تعبیر ہوگا۔

اس مساوات کی ترسیم حاصل کرنے کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں،
جب $لا = ۱$ تو $ما = ۲۰$ اور جب $لا = ۲$ تو $ما = ۴۰$
پس نقاط $(۲۰، ۱)$ اور $(۴۰، ۲)$ کو ملائے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے،



محور لا پر
وقت کو تعبیر
کر دو اور فرض
کر دو کہ ایک
انچ ایک گھنٹہ
کو تعبیر کرتا ہے
نیز فاصلہ
طے شدہ کو
محور ما پر
تعبیر کرو اور
فرض کر دو کہ
ایک چھوٹا

حصہ ۳ میل کو تعبیر کرتا ہے۔

اس بیان کے موافق ۱ اور ۲ کو مرسم کرو، اب ۱، ۲، ۳ ایسے نقطے ہیں
جن میں سے ہر ایک کا فاصلہ وقت کو تعبیر کرتا ہے اور معین اس فاصلے کو تعبیر کرتا
ہے جو وقت مذکور پر موٹر کا حیدر آباد سے ہو۔

ان نقطوں کو ملائے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے دیکھو شکل۔

اس ترسیم کو دیکھنے ہی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی خاص وقت پر موٹر کا
فاصلہ حیدر آباد سے کیا ہوگا یا برعکس اس کے حیدر آباد سے کسی خاص فاصلہ پر
موٹر کس وقت ہوگی۔ مثلاً ۹ بج کر ۲۰ منٹ پر موٹر حیدر آباد سے تقریباً ۲ میل کے
فاصلہ پر ہوگی، دس بج کر ۲۵ منٹ کے بعد تقریباً ۴ میل پر، نیز ۳۵ میل پر
۹ بج کر ۴۵ منٹ کے بعد ہوگی وغیرہ وغیرہ۔

علم حساب کی مدد سے یہ امور معلوم کرنے کے لئے ہر دفعہ جداگانہ سوال حل کرنا پڑتا ہے۔ مگر ترسیات میں ایسے بے شمار سوالات محض شکل کو استعمال کرنے سے حل ہو سکتے ہیں ایسی ترسیم کو حاضر شمار کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔ اگرچہ ترسیمی طور پر سوال حل کرنے میں پوری صحت میسر نہیں آتی تاہم اس میں جو یہ آسانی مصنف ہے کہ ہر سوال کا جواب خاص حدود کے اندر محض ترسیم کو دیکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے اس کا لحاظ رکھتے ہوئے یہ طریقہ حساب پر فوقیت رکھتا ہے۔

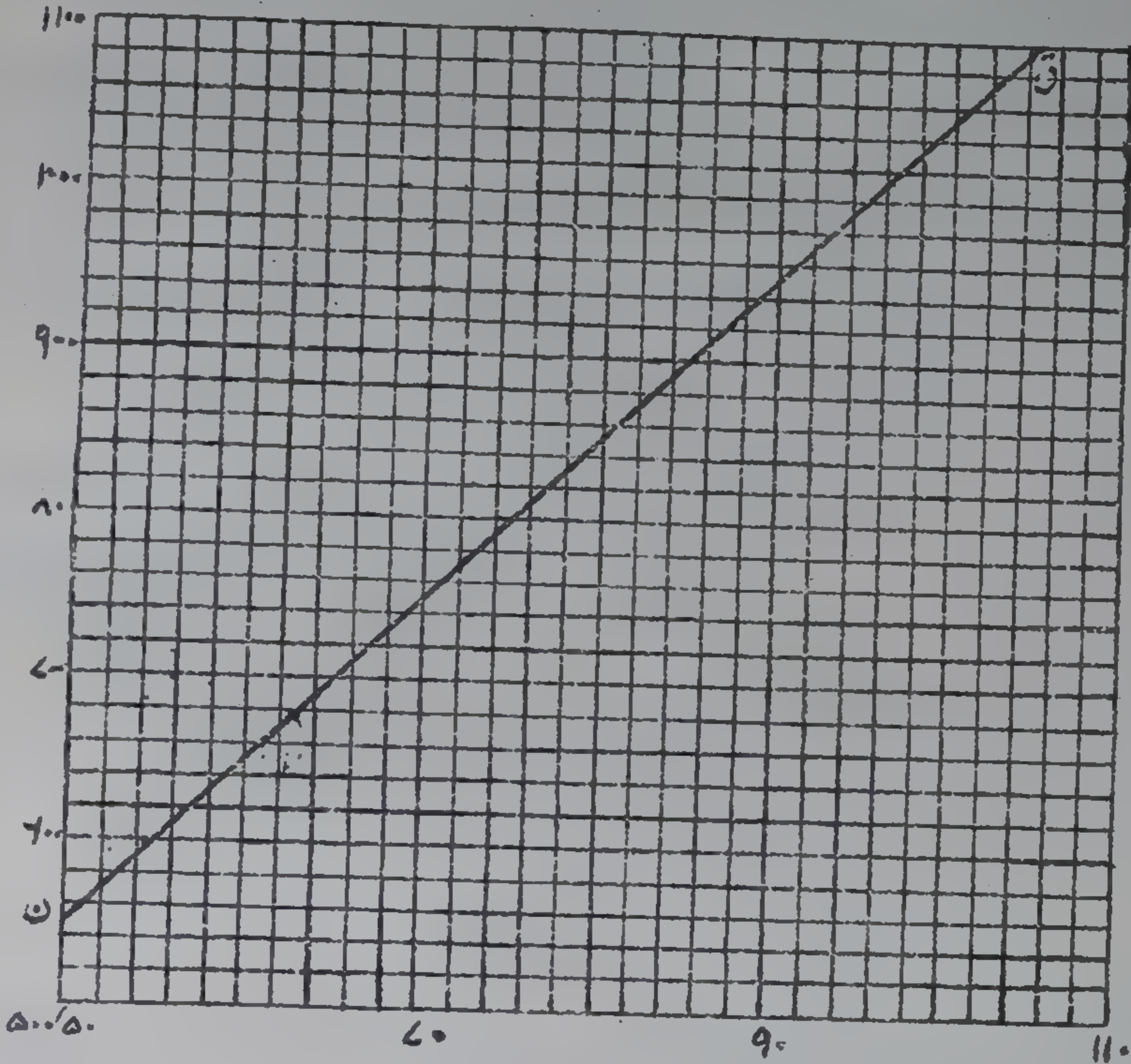
نوٹ۔ ہم نے وقت کی پیمائش ۸ بجے سے شروع کی اور فاصلہ کی نقطہ ابتداء فی حیدر آباد سے گویا ہمارے موجودہ مبدأ کے محدود (۰.۱۸) ہیں جہاں ۸ وقت کا محدود ہے اور صفر فاصلہ کا، دراصل ہمیں وقت کی پیمائش رات کے بارہ بجے سے کرنی چاہیے تھی جس صورت میں مبدأ کے محدود (۰.۶۰) ہوتے لیکن اس صورت میں رجب اول میں مبدأ کے پاس کا بہت سا حصہ بیکار ہو جاتا کیونکہ ترسیم اس میں واقع نہ ہوتی، اس لحاظ سے ہم نے نقطہ (۰.۱۸) کو مبدأ مان لیا یعنی مبدأ کو منتقل کر کے ہم نقطہ (۰.۱۸) پر آئے اور وقت اور فاصلہ کی پیمائشیں اس نقطہ سے کرنے لگے۔

شکل بالا میں چند مزید ترسیں بنائی گئی ہیں، جدول ذیل سے واضح ہو گا کہ ان سے جداگانہ کیا تعبیر ہوتا ہے۔

مقام روانگی	وقت روانگی	رفتار مع کیفیت
س ق	۱۵ میل	۳ میل فی گھنٹہ دسپے پرے
س ق	۳ میل	۱۸ میل فی گھنٹہ دسپے پرے
س ق	۶ میل	۶ میل فی گھنٹہ وکی جانب
س ق	۲۲ میل	۴۵ میل فی گھنٹہ دسپے پرے

مشق ۲۔ ایک اسکول کے دارالاقامہ کے ماہانہ اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور باقی لڑکوں کی تعداد پر موقوف ہے، ۵۰ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات ۵۵۰ روپیہ

ہیں اور ۱۰۵ لڑکوں کے ۱۱۰۰ روپے ہیں۔ ایک ترسیم بناؤ جس سے لڑکوں کی کسی تعداد کے اخراجات معلوم ہو سکیں، اس سے ۵۰ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات معلوم کرو اور نیز ان لڑکوں کی تعداد معلوم کرو جن کے اخراجات ۱۰۰۰ روپے ہیں۔ اس سے



ہمیں بدیہی طور پر یہ معلوم نہیں ہوتا کہ لڑکوں کی تعداد اور ان کے اخراجات میں سیدھا تناسب ہے تاہم اگر ہم یہ فرض کریں کہ لڑکوں کی تعداد لاگت سے مستقل

خرج ب ہے اور ہر لڑکے کا ماہانہ خرچ ا ہے تو کل خرچ ما = ا لا + ب
اب چونکہ ۵۰ لڑکوں کا خرچ ۵۵۰ روپیہ ہے اور ۱۰۵ کا ۱۱۰۰ روپیہ اسلئے

$$۱۵۰ + ب = ۵۵۰ \text{ روپے} \quad (۱)$$

$$۱۰۵ + ب = ۱۱۰۰ \text{ روپے} \quad (۲)$$

جس سے ۱۵۵ = ۵۵۰ یعنی ا = ۱۰ روپے، یعنی ہر ایک لڑکے کا خرچ دس روپیہ ہے۔

ا کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے ب = ۵۰، پس مستقل خرچ ۵۰ روپے ہے۔

اس لئے کل ماہانہ خرچ ما اور لڑکوں کی تعداد لا میں جبریہ تعلق ما = ۱۰ لا + ۵۰ ہے، یہ ایک مساوات درجہ اول ہے اس کی ترسیم صریحاً ایک خط مستقیم ہوگی۔

۲۰ لڑکوں کو محور لا پر ایک اینچ سے اور ۲۰ روپوں کو محور ما پر ایک چھوٹے حصے یعنی ۱۰ اینچ سے تعبیر کرو۔ نیز فصلوں کو ۵۰ سے اور معینوں کو ۵۰۰ سے ناپنا شروع کرو یعنی مبدأ کے محدود (۵۰، ۱۰۰) فرض کرو۔

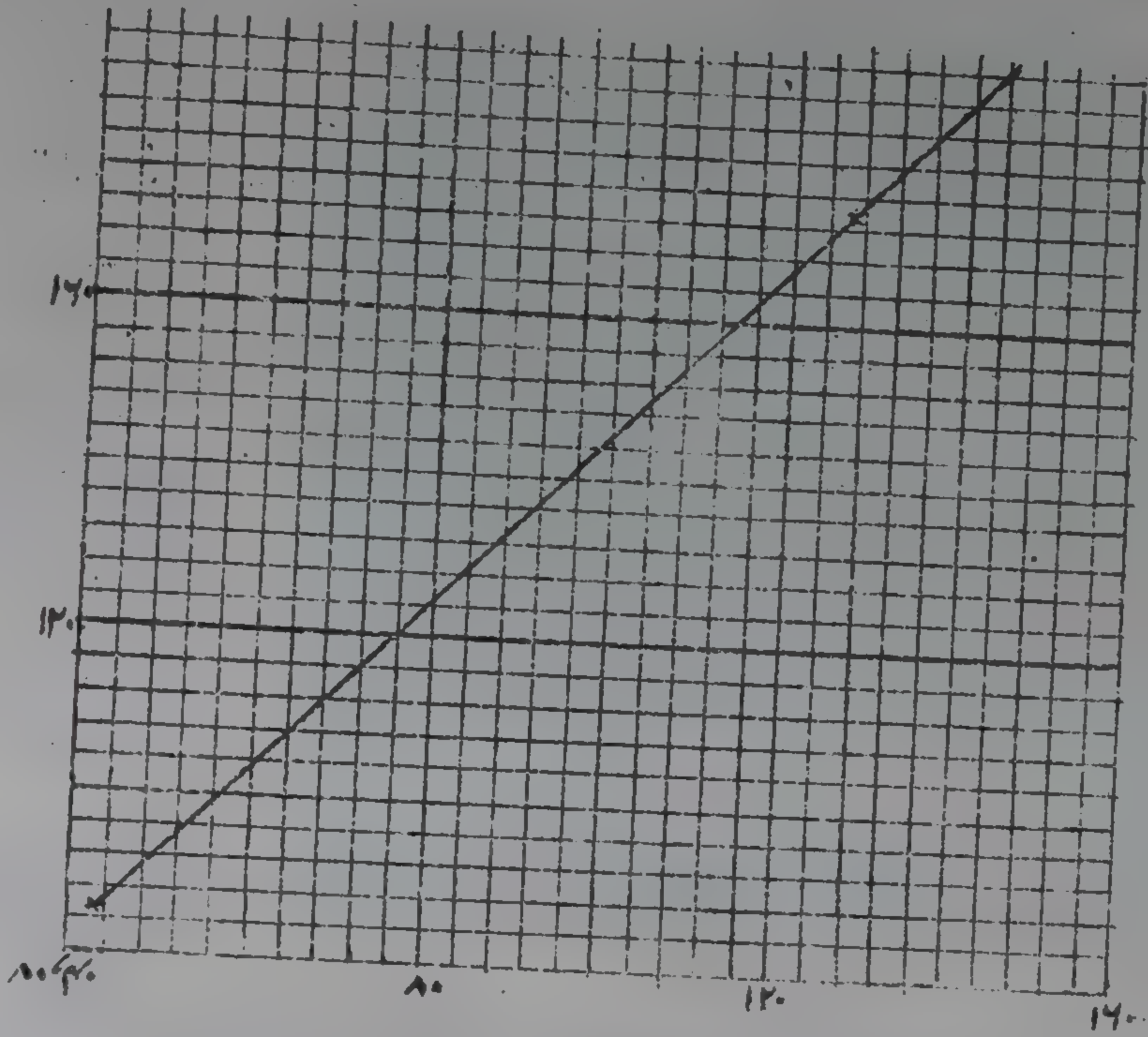
اب $ما = ۱۰ + ۵۰$ کی ترسیم بنانے کے لئے صرف دو نقطے ن اور ق ترسیم کرنا کافی ہوگا جن کے فصلے بالترتیب ۵۰ اور ۱۰۵ لڑکوں کو تعبیر کرتے ہیں اور معین ۵۵۰ اور ۱۱۰۰ روپوں کو، ان نقطوں کو ملانے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے، اس ترسیم کو محض دیکھنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ۵۰ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات ۸۰۰ روپے ہونگے اور ان لڑکوں کی تعداد جن کا خرچ ۱۰۰۰ روپیہ ما ہوا ہے ۹۵ ہے۔ شکل کو دیکھ کر ذیل کی جدول میں لڑکوں کی تعداد اور ان کے اخراجات کی چند مزید مثالیں درج کی گئی ہیں۔

تعداد لڑکوں کی	۶۰	۶۵	۸۵	۹۰
اخراجات	۶۵۰	۷۰۰	۹۰۰	۹۵۰

پس دفعہ ماقبل کی طرح ایسی ترسیم کو بھی بطور حاضر شمار استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مشق ۳۔ کسی امتحان کے پرچے جا بچتے وقت ایک ممتحن نے زیادہ سے زیادہ ۱۲۶ نشانات دئے اور کم سے کم ۳۴، اب وہ تمام پرچوں کے نشانات کو ایک خطی کلیہ کے موافق اس طرح بدلنا چاہتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ نشانات ۱۷۵ ہو جائیں اور کم سے کم ۸۵، بتاؤ کہ وہ اسے کس طرح کر سکتا ہے۔ اور معلوم کرو کہ جن پرچوں کے ابتدائی نشانات ۱۷۵، ۱۶۸، ۱۰۰، ۱۱۲، ۱۲۴ تھے ان کے مرتبہ نشانات کیا ہوں گے۔

افقی محور و لا پر اصلی نشانات کو اور انتصابی محور و ما پر نئے نشانات کو ناپو اور ہر صورت میں بیانہ ایک اینچ = ۲۰ فرض کرو۔

نیز فصلوں کو ۲۰ سے اور معینوں کو ۸۰ سے ناپنا شروع کرو۔ و نقاط $لا = ۳۴$ ، $ما = ۸۵$ اور $لا = ۱۲۶$ ، $ما = ۱۷۵$ کو شکل میں مرتسم کرو،



ان کو
ایک
مستقیم
خط کے
ذریعہ
ملاؤ، ترسیم
محصلہ
سے لا، ما
کی متناظر
قیمتیں
معلوم کرو۔

۱۲۴	۱۱۲	۱۰۰	۸۵	۶۵	اصلی نشانات
۱۷۲	۱۵۹	۱۴۶	۱۲۹	۱۰۸	نئے نشانات

مشق ۳۔ ایک نلی ایک حوض کو ۳ گھنٹے میں بھرتی ہے، دوسری ۵ گھنٹے میں،
بتاؤ کہ دونوں نلی کر حوض کو کتنی دیر میں بھر دیں گی۔

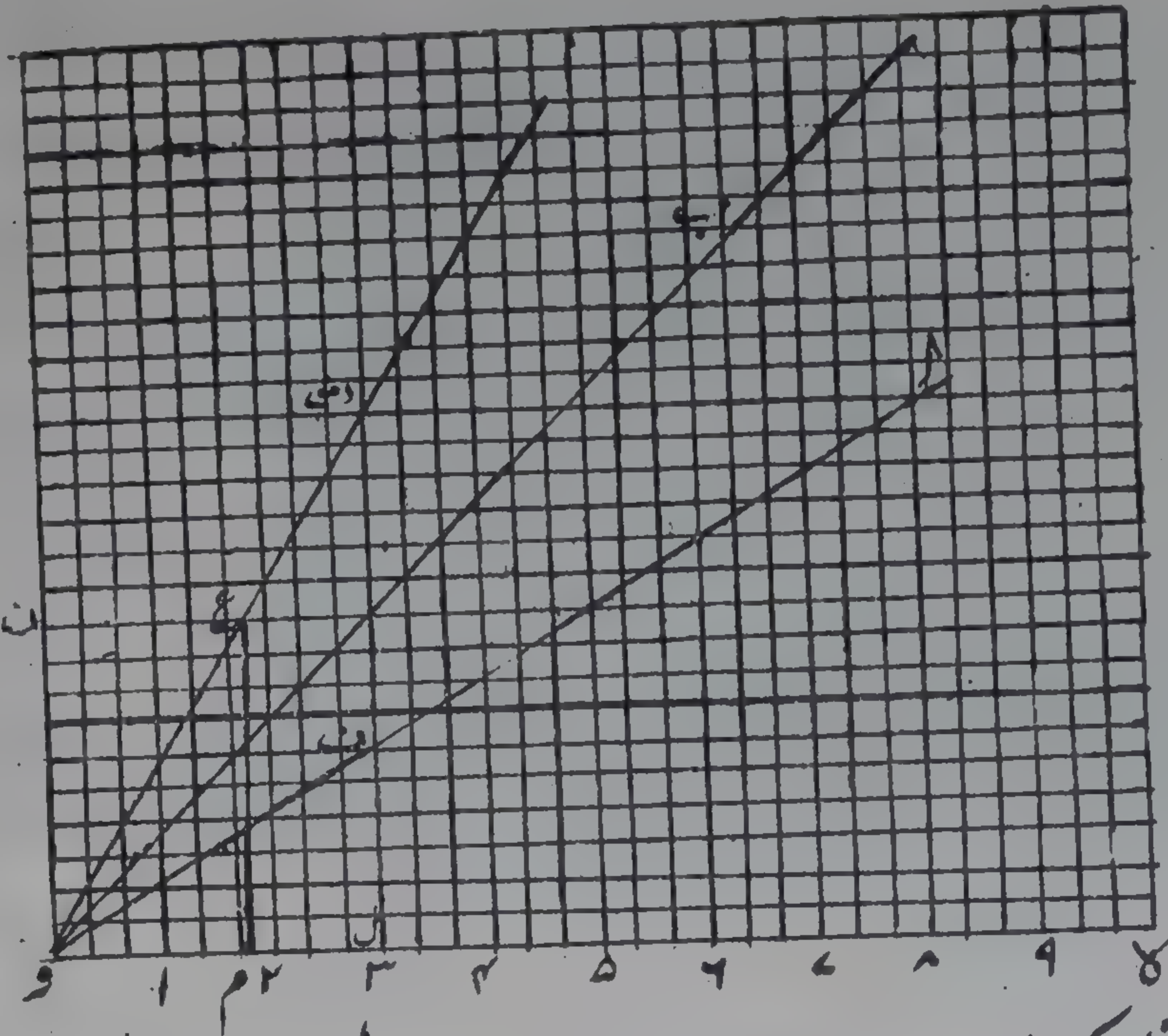
فرض کرو کہ محور لا پر کا ہر ایک چھوٹا حصہ $(= \frac{1}{10})$ اینچ) ۲۰ منٹ کو ظاہر کرتا

ہے اور محور سا پر ایک اینچ ون پور سے حوض کو تعبیر کرتا ہے۔

چھوٹی نلی جو حوض کو ۵ گھنٹوں میں بھرتی ہے، اس کی ترسیم اول دو نقاط
(۰، ۰) اور (۱، ۵) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

بڑی نلی جو حوض کو ۳ گھنٹے میں بھرتی ہے اس کی ترسیم نقاط (۰، ۰)
اور (۳، ۱) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

ہمیں ایک ایسی نلی کی ترسیم معلوم کرنی چاہیے جس کا کام ان دونوں نلیوں



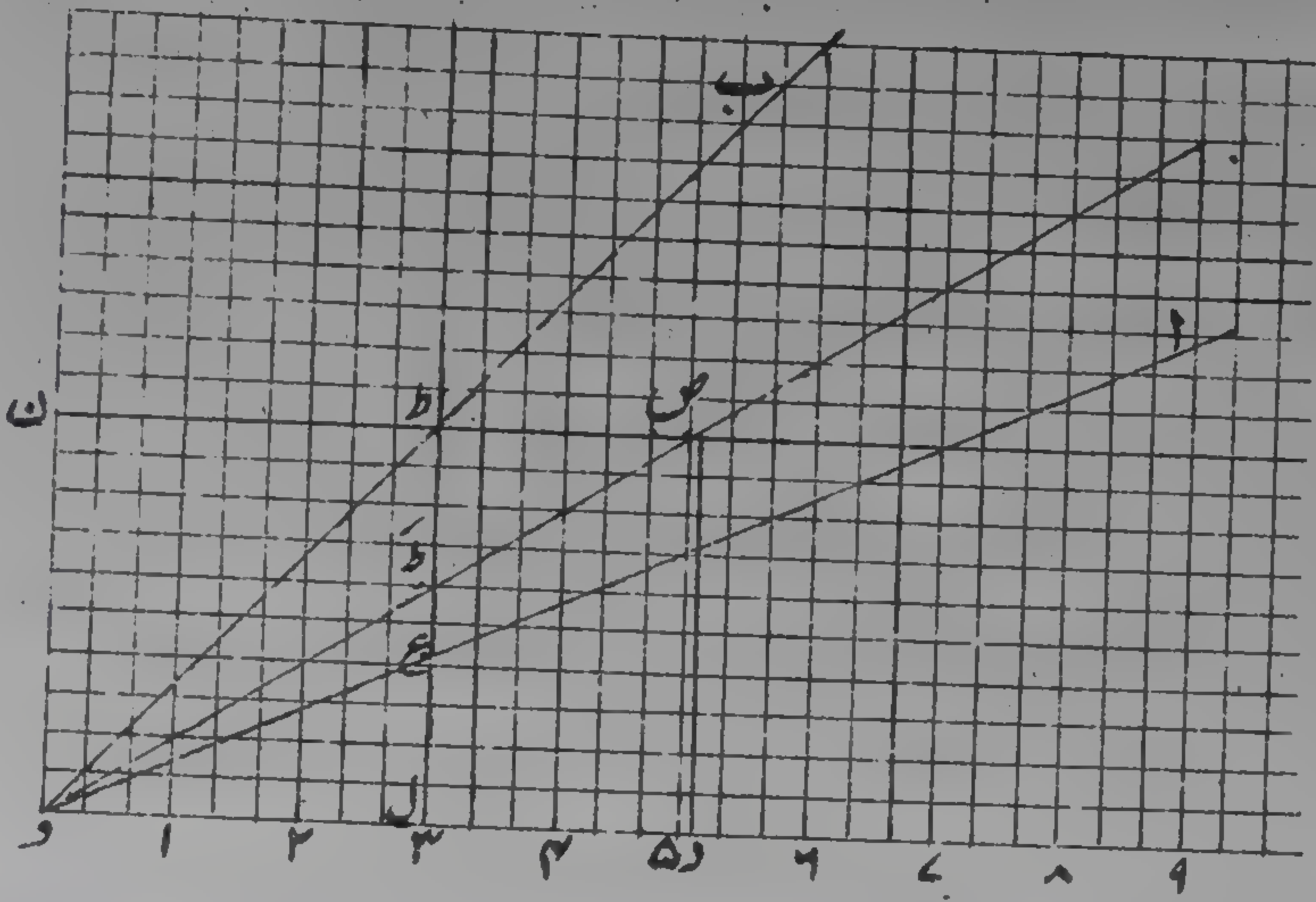
کے مجموعی کام
کے مساوی
ہو۔ اس نلی
کی ترسیم پر کا
ایک نقطہ (۰،۰)
ہے، ایک اور
نقطہ معلوم کرنے
کے لئے ۳
گھنٹہ کے نشان
ل میں سے
گزرنے والا

عمود کھینچو جو چھوٹی نلی کی ترسیم و ۱ سے ف پر ملے، اب ل ف چھوٹی نلی کا
۳ گھنٹہ کا کام ہے اور بڑی نلی کا ۳ گھنٹہ کا کام و ن کے مساوی ہے، اس لئے
ل ف کو ث تک اتنا خارج کرو کہ ف ث = و ن۔

اب ل ث = ل ف + ف ث = ل و ن یعنی ل ث دونوں نلیوں
کا تین گھنٹہ کا مجموعی کام ہے، پس نقطہ ث نلی کی ترسیم پر واقع ہے، اس لئے
نئی نلی کی ترسیم و ث ہے۔

اب ن سے محور لا کے ستوازی ایک خط کھینچو اور فرض کرو کہ یہ و ث
سے ع پر ملتا ہے، ع سے د کا پر عمود ع م نکالو، پس دونوں نلیاں وقت
و م میں م ع = و ن یعنی پورے حوض کو بھر دیتی ہیں۔
پس وقت مطلوبہ = و م = ۸۶ و ۱ گھنٹہ

اگر ایک نلی حوض کو بھرتی ہو اور دوسری خالی کرتی ہو تو اس طرح عمل کرو
تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ بڑی نلی حوض کو تین گھنٹے میں بھرتی ہے اور چھوٹی
نلی اُسے ۷ گھنٹے میں خالی کر دیتی ہے، اگر دونوں ایک ساتھ کھول دی جائیں
تو حوض کتنی دیر میں بھر جائے گا۔ بڑی نلی کے کام کی ترسیم و ب نقطہ



(۰،۰) اور (۱،۳)

میں سے گزرتی

ہے، چھوٹی

نلی کے کام کی

ترسیم و نقاط

(۰،۰) اور

(۱،۱) میں

سے گزرتی ہے

محور لا پر کے

۳ گھنٹے والے نشان ل میں سے ایک عمود کھینچو جو و ا، و ب سے بالترتیب
ع اور ط پر ملے۔

بڑی نلی کا تین گھنٹے کا کام ل ط ہے جہاں ل ط = و ن، کیونکہ یہ
پورے حوض کو ۳ گھنٹے میں بھر دیتی ہے۔

چھوٹی نلی ۳ گھنٹے میں حوض کا حصہ ل ع خارج کر دیتی ہے، پس اگر
دونوں نلیاں کھول دی جائیں تو ۳ گھنٹے میں یہ حوض کا حصہ ع ط بھر دینگی۔

اب سین ل ع ط پر ل ط کو ع ط کے مساوی قلع کر د، نقطہ ط
ایک ایسی نلی کی ترسیم پر واقع ہے جس کا کام ان دو نلیوں کے کام کے حاصل

تفریق کے مساوی ہے، پس اس نئی نلی کے کام کی ترسیم و ط ہے۔
ن میں سے ایک خط ن ص محور لا کے متوازی کھینچو جو و ط سے ص

پر ملے، ص سے و لا پر عمود ص د کھینچو۔

نئی نلی حوض کا حصہ ص د یعنی و ن وقت و د میں بھرتی ہے پس
و د وقت مطلوب ہے، اب و د = و ن = ۵ گھنٹہ تقریباً۔

۲۵۔ تحولی ترسیمیں۔ اکثر اوقات ہم ایک ہی چیز کو دو بیانیوں کے

ذریعہ ناپ سکتے ہیں مثلاً کوئی طول انچوں کے پیمانہ سے بھی ناپا جاسکتا ہے

مشق ۱۔ ۱۰۰ روپیہ انگریزی تقریباً ۱۱۶ روپیہ سکہ عثمانیہ کے مساوی ہیں، ایک سو اور دو سو روپیہ کی حدود کے اندر دونوں سکون کے باہمی ربط کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو۔

۱۰۰ روپیہ سکہ انگریزی = ۱۱۶ روپیہ سکہ عثمانیہ اور فرض کر دو کہ

u u l = u u u

تب $\frac{6}{114} = \frac{1}{19}$ کیونکہ سکوں میں سید ہا تناسب ہے، اس لئے $\frac{1}{19} = \frac{114}{114}$ لا سکوں کا باہمی ربط ہے۔

انگریزی روپوں
کو افقی محور ولا

پیر اور عثمانیہ
روپیوں کو انتہائی

محرم و ماہ پر

نایب اور فرض

کرو کہ ہر صورت

میں ۴۰ روپے

ایک ایجنے

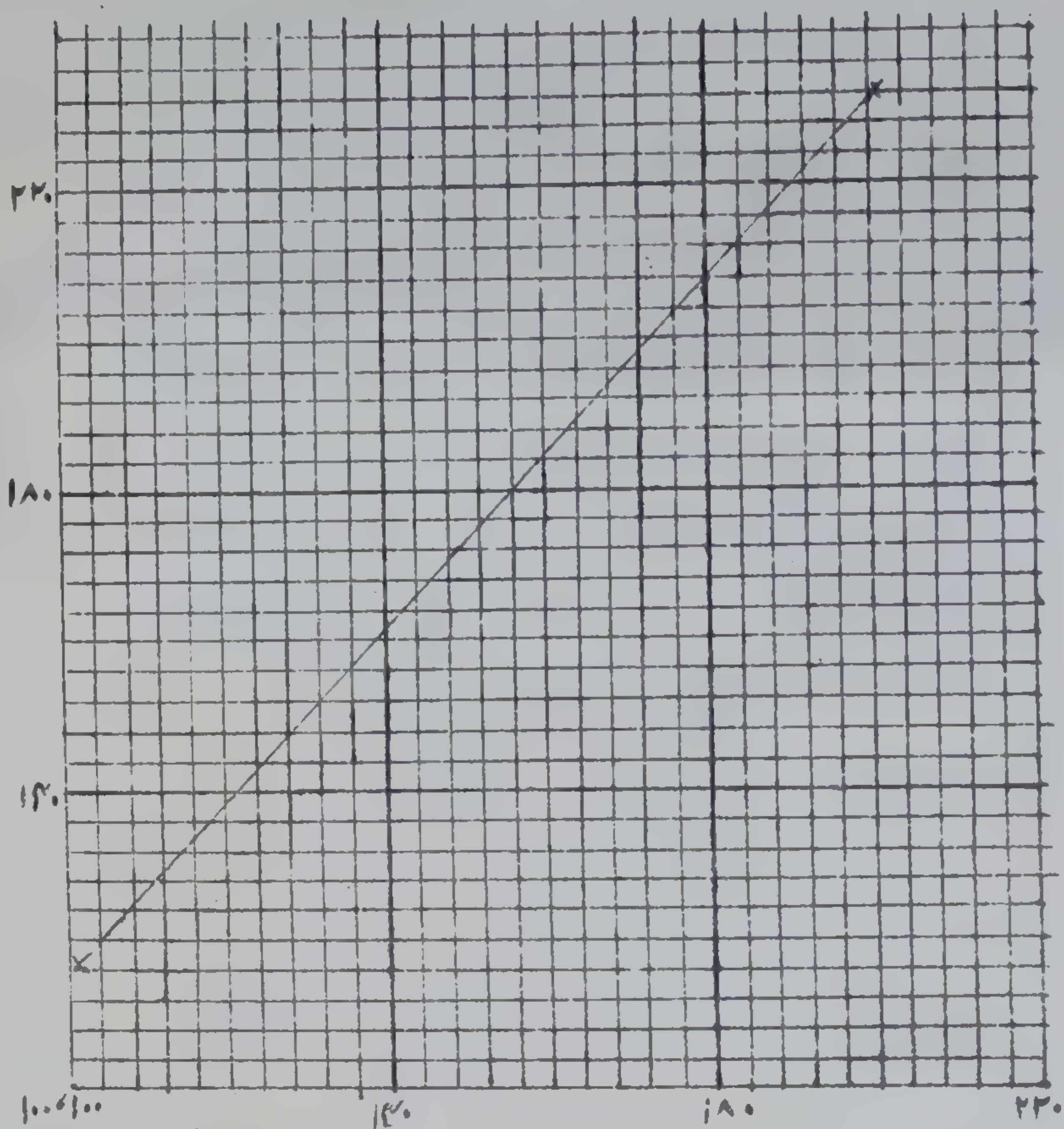
تقسیم ہوتے ہیں۔

میز خونکہ

ایک سو اور دس

کے

اندر دلوں کا



رابطہ مطلوب ہے اس لئے فضلوں اور معینوں کو ۱۰۰ سے ناپنا شروع کرو یعنی نقطہ (۱۰۰، ۱۰۰) کو مبدأ مقرر کرو۔

ترسیم پر دو نقطے (۱۱۶، ۱۰۰) اور (۲۳۲، ۳۰۰) ہیں، ان کو ملانے سے شکل میں ترسیم کھینچی گئی ہے، جدول ذیل میں انگریزی اور عثمانیہ روپوں کی چند متناظر قیمتیں درج ہیں جو اس شکل کو بطور حاضر شمار استعمال کرنے سے معلوم کی گئی ہیں۔

سکہ انگریزی	۱۴۴	۱۸۴	۱۳۲
سکہ عثمانیہ	۱۶۷	۲۱۴	۱۵۳

مشق ۲۔ پیش ناپنے کے پیمانہ سنٹی گریڈ اور فارن ہیت کے باہمی ربط کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو۔

فارن ہیت پر نقطہ انجماد یعنی پانی کے جمنے کا نقطہ ۳۲° سے تعبیر ہوتا ہے اور نقطہ جوش یعنی پانی کے کھولنے کا نقطہ ۲۱۲° سے سنٹی گریڈ پر نقطہ انجماد ۰° سے تعبیر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۱۰۰° سے۔

اس لئے ۱۰۰° سنٹی گریڈ = ۱۸۰° فارن ہیت

پس اگر کوئی پیش فارن ہیت پر ف

درجوں سے تعبیر ہو اور سنٹی گریڈ پر س درجوں

سے توف = ۳۲ = $\frac{۱۸۰}{۱۰۰}$ س

یعنی ف = $\frac{۱۸۰}{۱۰۰}$ س + ۳۲ (۱)

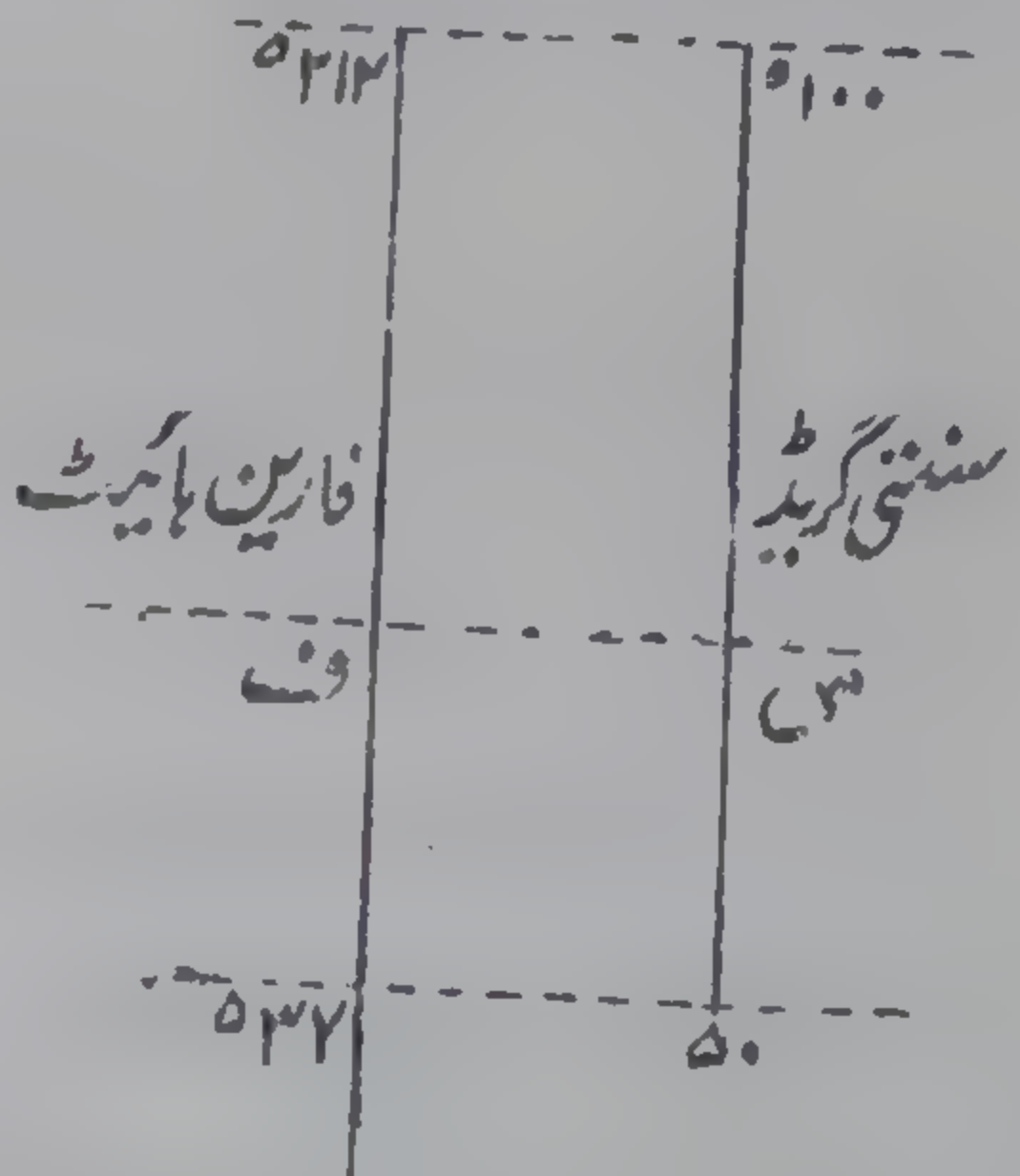
فارن ہیت کے درجوں کو افقی محور دلا

پر ناپو اور اس کے ۱۰۰ درجوں کو ایک اینچ سے

تعبیر کرو، نیز سنٹی گریڈ کے درجوں کو انتصابی

محور دھا پر ناپو اور اس کے ۵۰ درجوں کو ایک اینچ سے تعبیر کرو۔

مسادات (۱) سے دو نقاط ف = ۳۲، س = ۰



اور ف = ۲۱۲

س = ۱۰۰ حاصل

ہوتے ہیں، ان کو
مرسم کرنے اور ملانے

سے شکل میں ترسیم

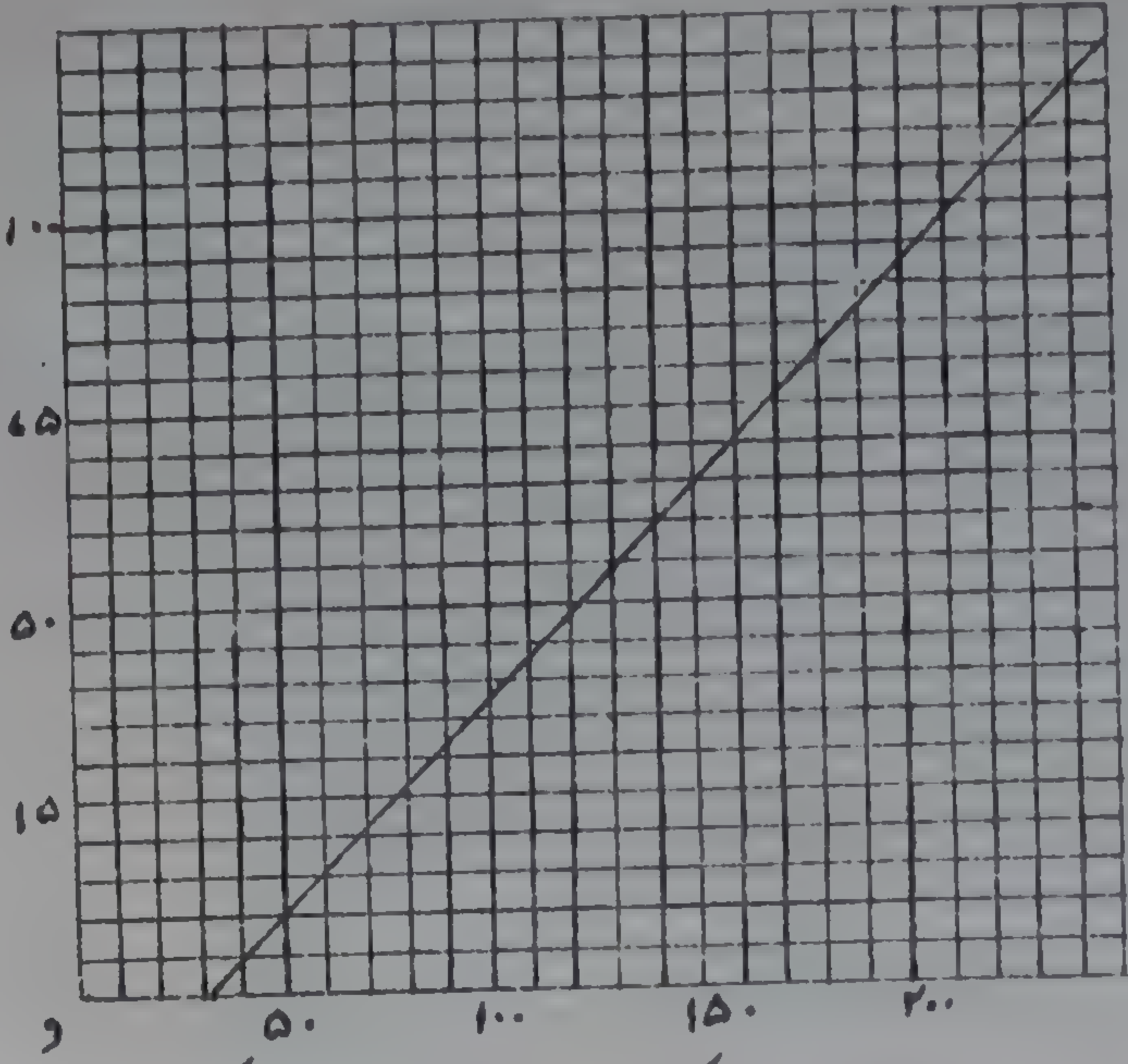
کھینچی گئی ہے، اوپر

کی شکل بہت چھوٹے

پیمانہ پر بنائی گئی ہے

اس لئے درجوں کی

باہمی تحویل کے لئے



یہ چنداں مفید نہیں ہو سکتی، طالب علم کاغذ کے بڑے تختہ پر فضلہ کے لئے پیمانہ
۱ = ۵۰ اور معیوں کے لئے ۱ = ۲۰ لے کر ترسیم بنائے۔

اگر تپش کی خاص حدود مثلاً ۹۰ ف اور ۱۰۰ ف سے یا اس کے قریب
قریب کی تپشوں سے ہیں زیادہ سرد کار ہو تو بڑے پیمانہ پر شکل بنائی جاسکتی ہے
جس سے زیادہ صحیح نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔

مساوات (۱) سے $s = \frac{5}{9} (F - 32)$ اور ہم دیکھتے ہیں کہ جب

ف = ۸۶ تو س = ۳۰ اور

جب ۱۰۴ ف = ۳۰ تو س = ۱۰۴

اس لئے ف کی قیمتوں کو فضلہ

اور س کی متناظر قیمتوں کو

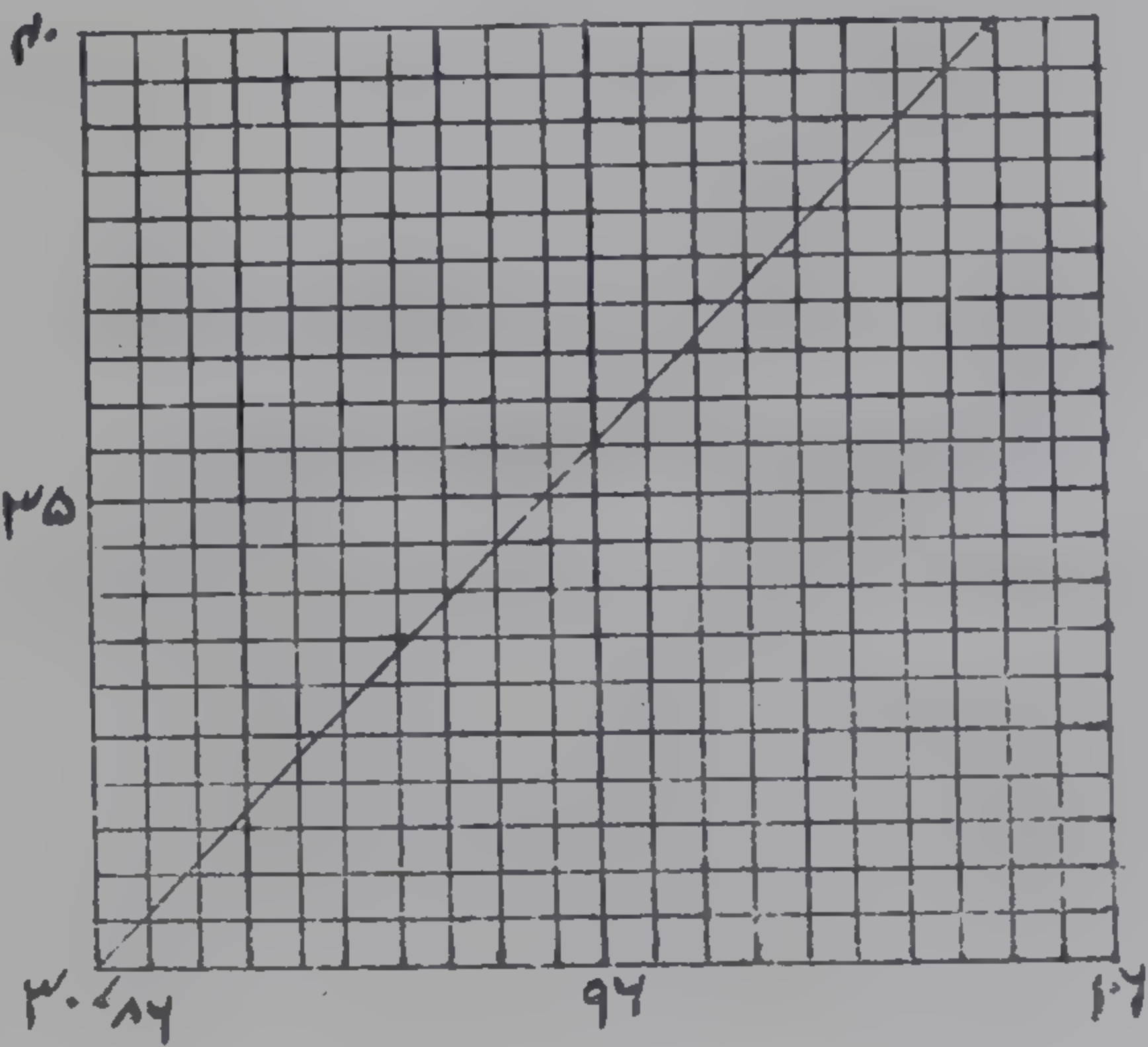
معین مان کر ان دو نقطوں کو

مرسم کرو، ان کو ملانے سے

۸۶ ف اور ۱۰۴ ف کی

حدود کے اندر ایک مناسب

پیمانہ پر ترسیم حاصل ہوتی ہے



جس کو بطور حاضر شمارا استعمال کیا جاسکتا ہے، اس شکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ ۹۰ ف، ۳۲ ر ۲ میں اور ۹۰۰ ف، ۳۷ ر ۳ کے مساوی ہے۔
جدول ذیل میں ف اور س کی چند تناظر قیمتیں اس ترسیم سے حاصل کی گئی ہیں۔

ف	۹۰.۵۸	۹۵	۹۸.۵۸	۱۰۲.۵۲	...
س	۳۲.۵۵	۳۵	۳۷	۳۹	...

۲۴۔ طبعی مقادیر جو ایک خطی مساوات کے ذریعہ مربوط ہوں۔

اب تک ہمیں یا تو ترسیم کی مساوات دی ہوئی تھی یا سوال کی نوعیت ایسی تھی کہ اس کی بنا پر متغیروں کی باہمی مساوات باسانی معلوم ہو سکے، حسابی اور کھوٹی ترسیموں میں ہم نے سوالات سے ایسی مساواتیں مرتب کیں اور ان سے نقطے حاصل کر کے مقادیر کی ترسیمیں بنائیں، لیکن بعض اوقات متغیروں کی تناظر قیمتیں مشاہدہ یا تجربہ کی بنا پر معلوم کی جاتی ہیں، مثلاً عمل یا لیوریٹری میں متعلقہ مقادیر کی قیمتوں کے چند جوڑے تجربہ سے معلوم کئے جاتے ہیں اور یہ مطلوب ہوتا ہے کہ ان مقداروں کے باہمی ربط کی جبریہ مساوات معلوم کی جائے۔

اس غرض سے ہم ان مقداروں کی تناظر قیمتوں سے نقطے مرتسم کرتے ہیں اور کئی مرتبہ ایسا ہوتا ہے کہ یہ نقطے قریب قریب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس صورت میں اگر ہم ایک ایسا مستقیم خط کھینچیں جو یکساں طور پر ان نقطوں کے بیچوں بیچ میں سے ہو کر گزرے تو اس خط کی مساوات قریب قریب ان مقداروں کے باہمی ربط کو تعبیر کرے گی، لیکن یہ ربط صرف ان حدود کے اندر صحیح خیال کیا جاتا ہے جن کے اندر تجربہ کیا گیا ہے۔
مشق ۱۔ ایک مشین کے ذریعہ مختلف وزنوں کو اٹھانے کے لئے جو قوتیں درکار ہوتی ہیں وہ جدول ذیل میں درج ہیں۔

قوت، ق	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
وزن، و	۳۲	۷۰	۱۱۸	۱۴۶	۱۸۴	۲۲۲

ق اور و کی تناظر قیمتوں سے نقطے مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ ق اور و کے باہمی ربط کو ہم $ق = ۱ \times و + ب$ سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں ۱ اور ب مستقل مقدار ہیں،

نیز ۱ اور ب کی قیمتیں

دریافت کرو، قوت

کو بطور فصلہ اور وزن

کو بطور معین ناپو قوت

کے لئے ۱ پونڈ کو

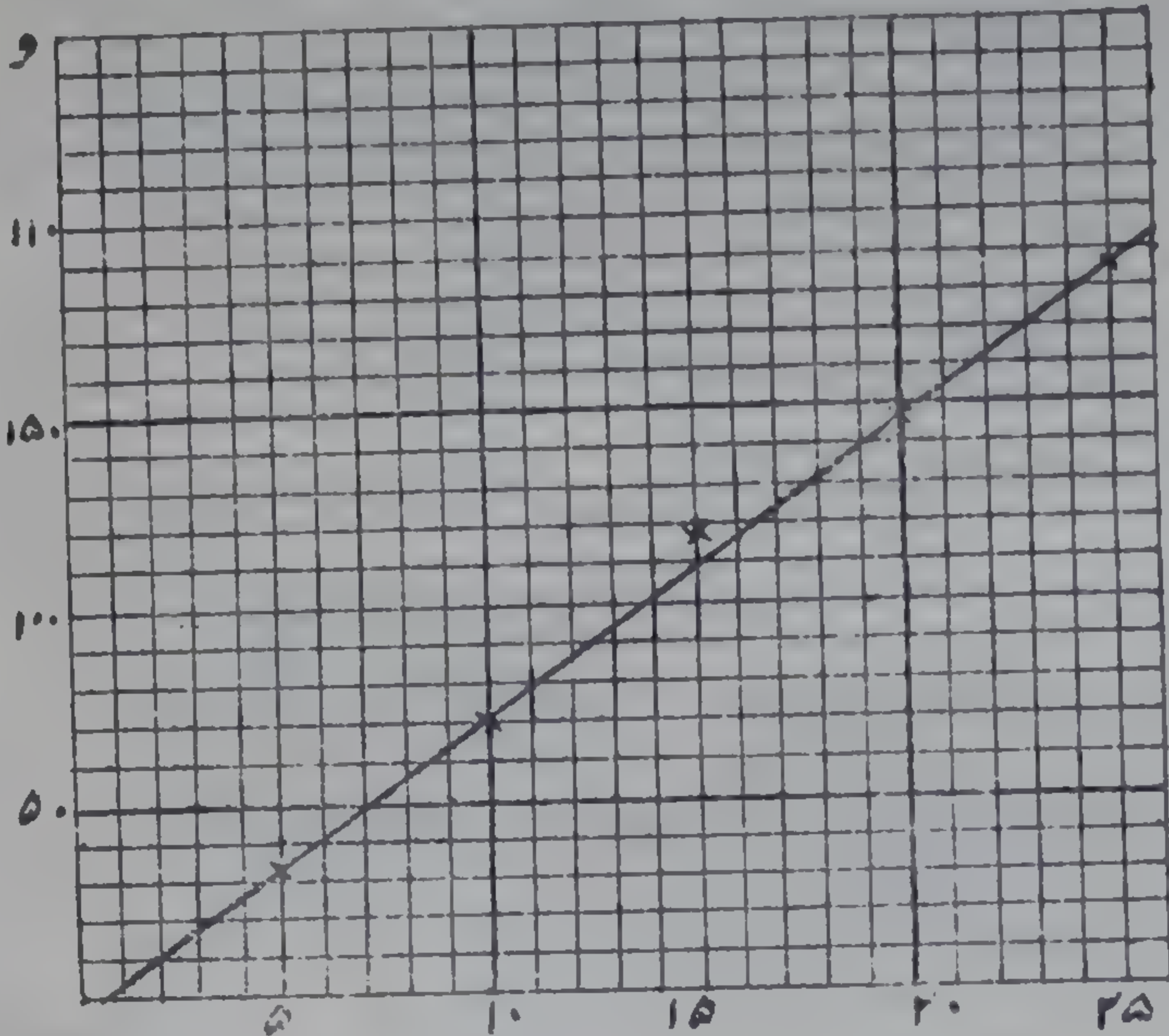
ایک اینچ سے تعبیر کرو

اور وزن کے لئے

۱۰۰ پونڈ کو ایک اینچ

سے تعبیر کرو۔

اس طرح نقاط ق



(۳۲، ۵)، (۷۰، ۱۰)، (۱۱۸، ۱۵) ... وغیرہ وغیرہ کو مرتسم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سب کے سب ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو عین مبداء میں سے نہیں گزرتا۔ پس ہم جائز طور پر فرض کر سکتے ہیں کہ ق اور و میں ربط $ق = ۱ \times و + ب$ موجود ہے جہاں ۱، ب مستقل مقدار ہیں اس مساوات میں ق اور و کی بجائے بالترتیب ۵ اور ۳۲ درج کرنے سے

$$۵ = ۳۲ + ۱ \times ب \quad (۱)$$

نیز ق اور و کی بجائے بالترتیب ۲۰، ۱۴۶ لکھنے سے

$$۲۰ = ۱۴۶ + ۱ \times ب \quad (۲)$$

مساوات (۱) اور (۲) سے $\frac{۳}{۳۸} = ۱$ اور $ب = \frac{۱۵}{۱۹}$

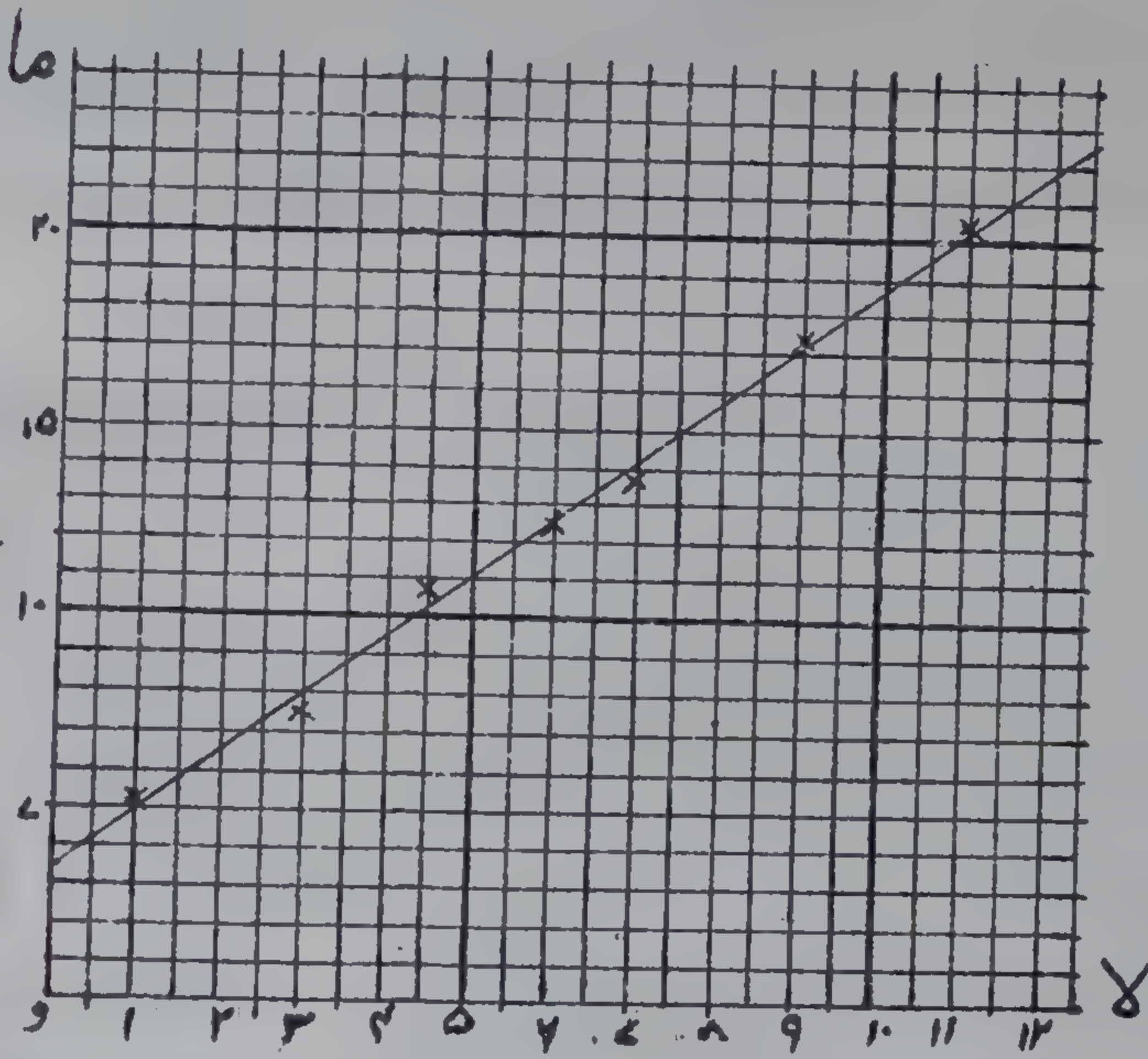
پس مساوات مطلوبہ جو قوت اور وزن کے باہمی ربط کو ظاہر کرتی ہے

$$ق = \frac{۵}{۳۸} و + \frac{۱۵}{۱۹} یعنی ۵ - ۳۸ ق + ۳۰ = ۰$$

مشق ۲۔ ایک مقدار لا کی قیمتوں کے جواب میں ایک اور مقدار ما کی تقریبی قیمتیں تجربہ کی بنا پر معلوم کی گئی ہیں، یہ قیمتیں جدول ذیل میں درج ہیں۔

لا	۱	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۱	۱۳
ما	۵.۲	۷.۵	۱۰.۶	۱۲.۵	۱۳.۵	۱۳.۸	۱۴.۳	۱۵.۳	۲۰.۳	۲۳.۳

لا، ما کی قیمتوں کے ان جوڑوں سے نقطے مرتسم کرو، یہ تسلیم کر کے کہ لا، ما میں ربط $ما = لا + ب$ موجود ہے اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔



لا کی قیمتوں کو محور لا پر بیانہ ایچ = ۵ کے مطابق اور ما کی قیمتوں کو محور ما پر بیانہ ایچ = ۱۰ کے مطابق ناپنے سے نقطے مرتسم کرو، یہ نقطے قریب قریب ایک خط مستقیم کے گرد واقع ہوتے ہیں اب ایک کالے تار کے

کو تان کر رکھنے سے وہ خط مستقیم حاصل کرو جو یکساں طور پر ان نقطوں کے بیچ میں سے ہو کر گزرے،

معلوم ہوتا ہے کہ اس خط پر ذیل کے دو نقطے تقریباً واقع ہیں

$$لا = ۶، ما = ۱۲.۵ اور لا = ۱۱، ما = ۲۰$$

پس ربط $ما = ۱ لا + ۱ ب$ میں انہیں مندرج کرنے سے

$$۱۳۵ = ۱۶ + ۱ ب \text{ اور } ۲۰ = ۱۱ + ۱ ب$$

تفریق کرنے سے $۱۵ = ۵$ یعنی $۱ = ۱۵$

اس لئے $۱۳۵ = ۱۶ + ۱۵ \times ۶$ پس $ب = ۳۵$

پس مطلوبہ ربط $ما = ۱۵ لا + ۳۵ ب$ ہے۔

مشق ۳۔ سہل میں ایک کرین یا حاملہ کے ذریعہ وزن اٹھاتے وقت جو کرین کے دستہ پر عموماً زور لگانا پڑتا ہے اس کی قیمتیں ناپی گئی ہیں اور جدول ذیل میں درج ہیں۔

وزن، و	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰
زور، ز	۷۵۲	۸۵۴	۹۵۳	۱۰۵۷	۱۱۵۵	۱۲۵۸۳	۱۳۵۹

وزن اور زور کا باہمی ربط دریافت کرو

وزنوں کو

افقی محور پر پیمانہ ایک

انچ = ۱۰۰ اور

زوروں کو انتصابی

محور پر پیمانہ ایک

انچ = ۲ کے موافق

ناپوں، فصلوں کو

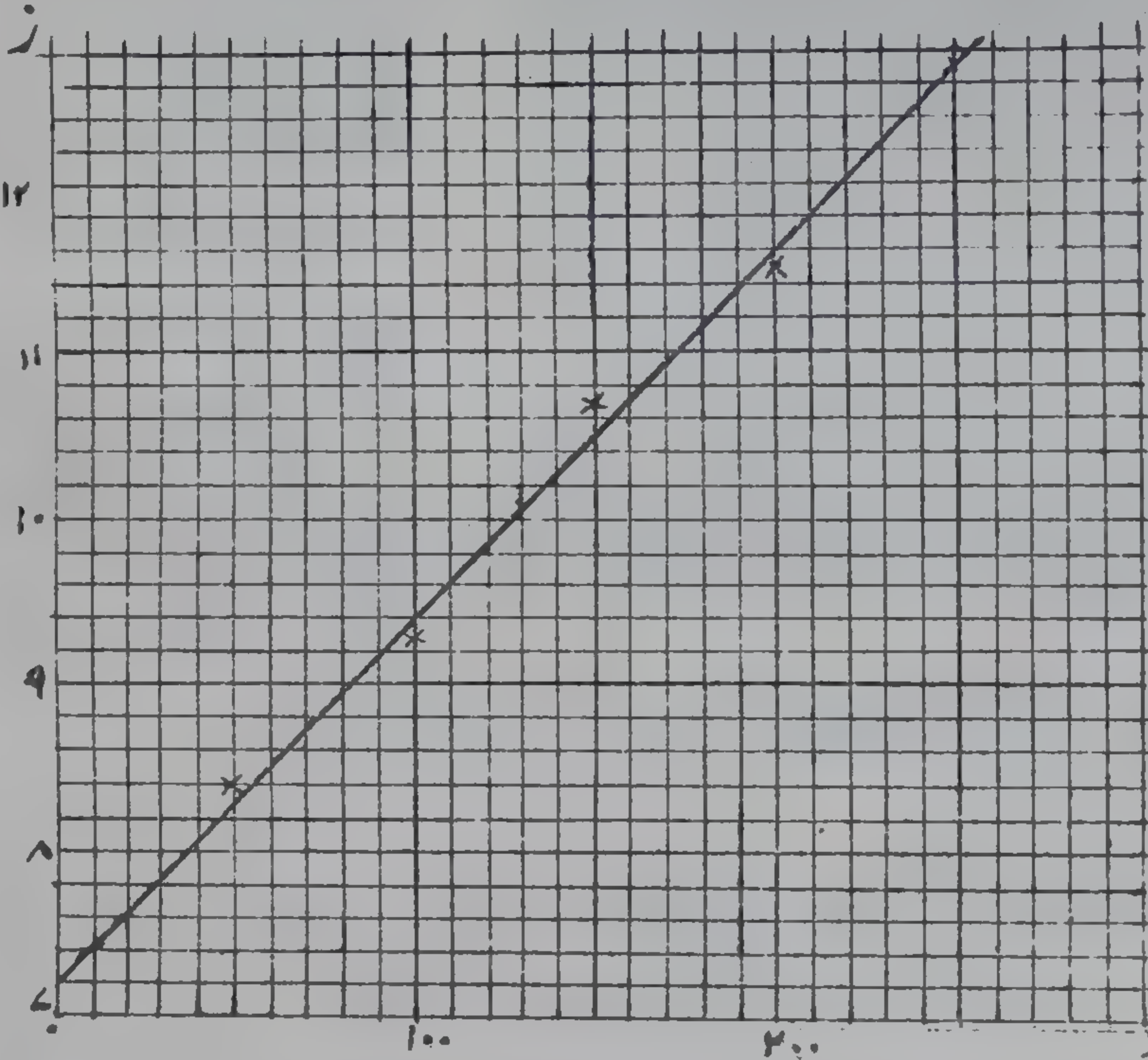
صفر اور معینوں

کو ۷ سے ناپنا

شروع کرو۔

وزن اور

زور کی متناظر قیمتیں



سے نقطے مرتسم کر کے کالے تاگے کے ذریعہ ایک مستقیم خط کا مقام معلوم کیا گیا ہے جو جو یکساں طور ان نقطوں کے بیچوں بیچ میں سے ہو کر گزرتا ہے۔
فرض کرو کہ اس خط کی مسادات $z = d + b$ ہے جہاں d اور b مستقل
مقداریں ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس خط پر دو نقطے ہیں

$$\begin{cases} 40 = d \\ 180 = b \end{cases} \text{ اور } \begin{cases} 858 = z \\ 1152 = z \end{cases}$$

جن کو مسادات میں درج کرنے سے $858 = d + b$ اور $1152 = d + b$ اور $40 = d$ اور $180 = b$ سے
تفریق سے $252 = 110$ یعنی $d = 252$ اور $b = 302$ تقریباً
پس مطلوبہ ربط $z = 502.18 = 252 + 302$ ہے۔

امثلہ نمبری ۶

۱۔ گیہوں کا نرخ ۵ سیر فی روپیہ ہے اور چاولوں کا ۳ سیر فی روپیہ، ہر صورت میں
نرخ کا ترسیمی حاضر شمار ۱۰ اور ۲۰ سیر کی حدود کے اندر بناؤ اور معلوم کرو کہ $\frac{1}{4}$ روپیہ
کے کتنے چاول آئیں گے، نیز بتاؤ کہ ۱۳ سیر گیہوں کی کیا قیمت ہوگی۔

۲۔ ایک شخص کی رہائش اور خوراک وغیرہ کے اخراجات ایک ہوٹل میں ۱۵ روپے
آٹہ فی ہفتہ ہیں، اس کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو۔

۳۔ ۳۰ نارنگیوں کی قیمت ۶ روپیہ ۴ آٹہ ہے، ایک سے ساٹھ تک نارنگیوں کی
کسی تعداد کی قیمت ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو اور اس سے معلوم کرو کہ ۷ نارنگیوں
کی کیا قیمت ہوگی اور ۹ روپے ۷ آٹہ کی کل ثابت نارنگیاں کتنی آئیں گی۔

۴۔ ایک کمرہ کا طول ۸ فٹ اور عرض $\frac{1}{4}$ فٹ ہے، اور اس کے اندر فرش
لگانے کی کل لاگت ۳۲۵ روپے ہے، جن کمروں کے رقبے 12×15 اور 23×25
کے درمیان ہیں ان کے اندر فرش لگانے کی قیمت ترسیم سے معلوم کرو۔

۵۔ یہ فرض کر کے کہ چت جسم ایک مٹرک پر یکساں رفتار سے حرکت کرتے
ہیں، ایک ہی شکل میں ذیل کے معطیات کی بناء پر ان کی حرکتوں کی
ترسیلیں بناؤ۔

مقام روانگی	وقت روانگی	رفتار
د	۶ بجے صبح	۵ میل فی گھنٹہ دسے پرے
د سے ۳ میل	۸ بجے صبح	۳ میل فی گھنٹہ دسے پرے
د سے ۱۱ میل	۴ بجے شام	۱/۲ میل فی گھنٹہ دکی طرف

۶۔ ایک شخص صبح کے ۷ بجے ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے، اس کی حرکت کی ترسیم بناؤ اور شکل سے معلوم کرو کہ وہ کس وقت مقام ابتدائی سے ۲۲ میل کے فاصلہ پر ہوگا اور ۲ گھنٹے ۲۰ منٹ میں کس قدر فاصلہ طے کرے گا۔

۷۔ ایک ریل گاڑی ۱/۲ گھنٹہ میں یکساں رفتار سے ۵۴ میل طے کرتی ہے، اس کی حرکت کی ترسیم بناؤ، اس سے معلوم کرو کہ کتنے وقت میں یہ ۱۷۰ میل طے کرے گی اور ۱۲ منٹ میں کتنا فاصلہ طے ہوگا۔

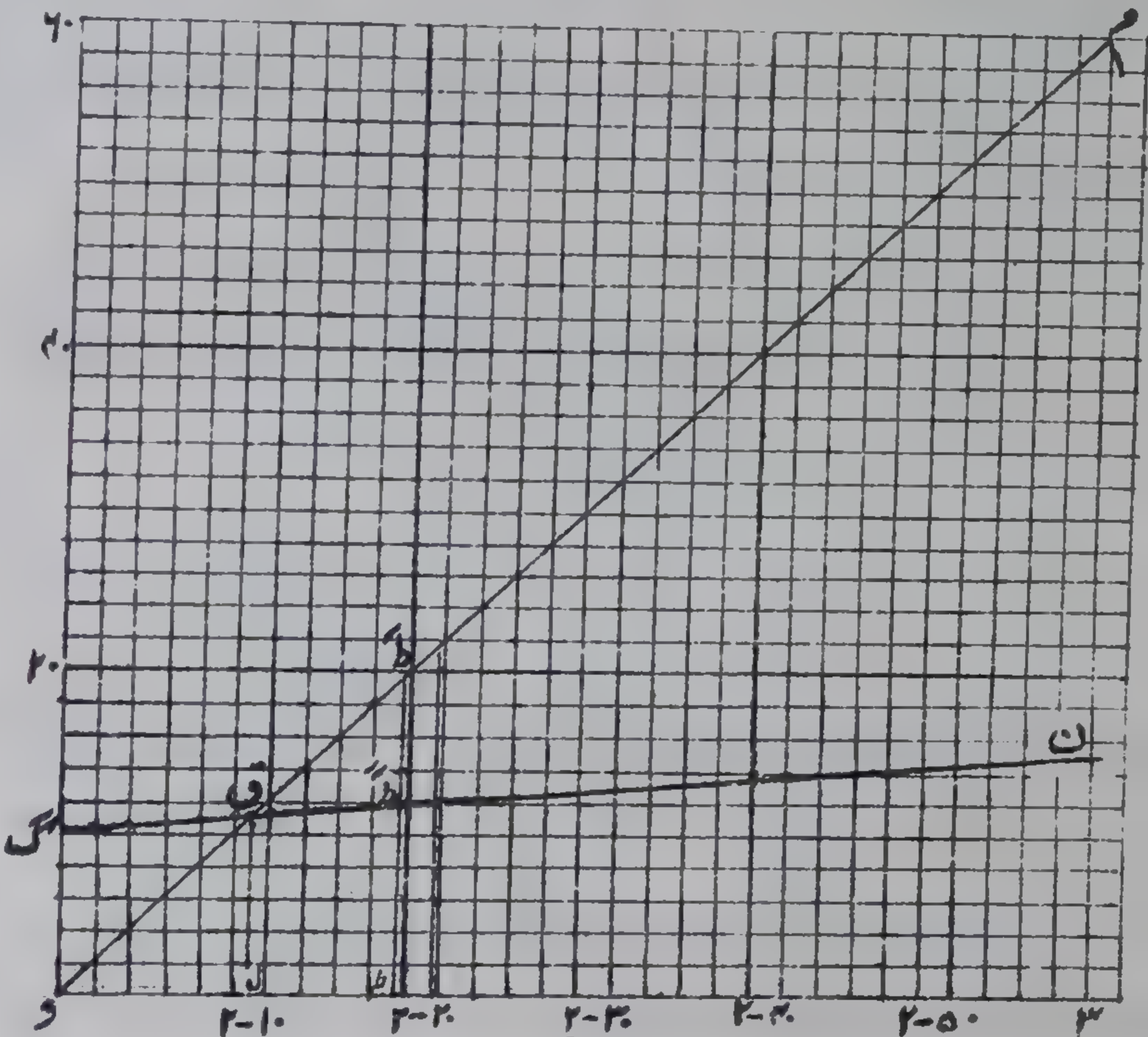
۸۔ ایک جسم ۳ فٹ فی سکند کی رفتار سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ۲۰ سکندوں کے بعد اس کی رفتار ۳ + ۲ فٹ ہوتی ہے، اس کی رفتار کی ترسیم بناؤ اور اس سے معلوم کرو کہ ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۵، ۱۹۷، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۱، ۲۷۳، ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۳، ۲۸۵، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۱، ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۷، ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۵، ۳۴۷، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۱، ۳۶۳، ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹، ۳۷۱، ۳۷۳، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۷۹، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۵، ۳۸۷، ۳۸۹، ۳۹۱، ۳۹۳، ۳۹۵، ۳۹۷، ۳۹۹، ۴۰۱، ۴۰۳، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۱۱، ۴۱۳، ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۱۹، ۴۲۱، ۴۲۳، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۳۹، ۴۴۱، ۴۴۳، ۴۴۵، ۴۴۷، ۴۴۹، ۴۵۱، ۴۵۳، ۴۵۵، ۴۵۷، ۴۵۹، ۴۶۱، ۴۶۳، ۴۶۵، ۴۶۷، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۷۷، ۴۷۹، ۴۸۱، ۴۸۳، ۴۸۵، ۴۸۷، ۴۸۹، ۴۹۱، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۷، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۷، ۵۰۹، ۵۱۱، ۵۱۳، ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۱۹، ۵۲۱، ۵۲۳، ۵۲۵، ۵۲۷، ۵۲۹، ۵۳۱، ۵۳۳، ۵۳۵، ۵۳۷، ۵۳۹، ۵۴۱، ۵۴۳، ۵۴۵، ۵۴۷، ۵۴۹، ۵۵۱، ۵۵۳، ۵۵۵، ۵۵۷، ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۷، ۵۶۹، ۵۷۱، ۵۷۳، ۵۷۵، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۱، ۵۸۳، ۵۸۵، ۵۸۷، ۵۸۹، ۵۹۱، ۵۹۳، ۵۹۵، ۵۹۷، ۵۹۹، ۶۰۱، ۶۰۳، ۶۰۵، ۶۰۷، ۶۰۹، ۶۱۱، ۶۱۳، ۶۱۵، ۶۱۷، ۶۱۹، ۶۲۱، ۶۲۳، ۶۲۵، ۶۲۷، ۶۲۹، ۶۳۱، ۶۳۳، ۶۳۵، ۶۳۷، ۶۳۹، ۶۴۱، ۶۴۳، ۶۴۵، ۶۴۷، ۶۴۹، ۶۵۱، ۶۵۳، ۶۵۵، ۶۵۷، ۶۵۹، ۶۶۱، ۶۶۳، ۶۶۵، ۶۶۷، ۶۶۹، ۶۷۱، ۶۷۳، ۶۷۵، ۶۷۷، ۶۷۹، ۶۸۱، ۶۸۳، ۶۸۵، ۶۸۷، ۶۸۹، ۶۹۱، ۶۹۳، ۶۹۵، ۶۹۷، ۶۹۹، ۷۰۱، ۷۰۳، ۷۰۵، ۷۰۷، ۷۰۹، ۷۱۱، ۷۱۳، ۷۱۵، ۷۱۷، ۷۱۹، ۷۲۱، ۷۲۳، ۷۲۵، ۷۲۷، ۷۲۹، ۷۳۱، ۷۳۳، ۷۳۵، ۷۳۷، ۷۳۹، ۷۴۱، ۷۴۳، ۷۴۵، ۷۴۷، ۷۴۹، ۷۵۱، ۷۵۳، ۷۵۵، ۷۵۷، ۷۵۹، ۷۶۱، ۷۶۳، ۷۶۵، ۷۶۷، ۷۶۹، ۷۷۱، ۷۷۳، ۷۷۵، ۷۷۷، ۷۷۹، ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۷، ۷۸۹، ۷۹۱، ۷۹۳، ۷۹۵، ۷۹۷، ۷۹۹، ۸۰۱، ۸۰۳، ۸۰۵، ۸۰۷، ۸۰۹، ۸۱۱، ۸۱۳، ۸۱۵، ۸۱۷، ۸۱۹، ۸۲۱، ۸۲۳، ۸۲۵، ۸۲۷، ۸۲۹، ۸۳۱، ۸۳۳، ۸۳۵، ۸۳۷، ۸۳۹، ۸۴۱، ۸۴۳، ۸۴۵، ۸۴۷، ۸۴۹، ۸۵۱، ۸۵۳، ۸۵۵، ۸۵۷، ۸۵۹، ۸۶۱، ۸۶۳، ۸۶۵، ۸۶۷، ۸۶۹، ۸۷۱، ۸۷۳، ۸۷۵، ۸۷۷، ۸۷۹، ۸۸۱، ۸۸۳، ۸۸۵، ۸۸۷، ۸۸۹، ۸۹۱، ۸۹۳، ۸۹۵، ۸۹۷، ۸۹۹، ۹۰۱، ۹۰۳، ۹۰۵، ۹۰۷، ۹۰۹، ۹۱۱، ۹۱۳، ۹۱۵، ۹۱۷، ۹۱۹، ۹۲۱، ۹۲۳، ۹۲۵، ۹۲۷، ۹۲۹، ۹۳۱، ۹۳۳، ۹۳۵، ۹۳۷، ۹۳۹، ۹۴۱، ۹۴۳، ۹۴۵، ۹۴۷، ۹۴۹، ۹۵۱، ۹۵۳، ۹۵۵، ۹۵۷، ۹۵۹، ۹۶۱، ۹۶۳، ۹۶۵، ۹۶۷، ۹۶۹، ۹۷۱، ۹۷۳، ۹۷۵، ۹۷۷، ۹۷۹، ۹۸۱، ۹۸۳، ۹۸۵، ۹۸۷، ۹۸۹، ۹۹۱، ۹۹۳، ۹۹۵، ۹۹۷، ۹۹۹، ۱۰۰۱، ۱۰۰۳، ۱۰۰۵، ۱۰۰۷، ۱۰۰۹، ۱۰۱۱، ۱۰۱۳، ۱۰۱۵، ۱۰۱۷، ۱۰۱۹، ۱۰۲۱، ۱۰۲۳، ۱۰۲۵، ۱۰۲۷، ۱۰۲۹، ۱۰۳۱، ۱۰۳۳، ۱۰۳۵، ۱۰۳۷، ۱۰۳۹، ۱۰۴۱، ۱۰۴۳، ۱۰۴۵، ۱۰۴۷، ۱۰۴۹، ۱۰۵۱، ۱۰۵۳، ۱۰۵۵، ۱۰۵۷، ۱۰۵۹، ۱۰۶۱، ۱۰۶۳، ۱۰۶۵، ۱۰۶۷، ۱۰۶۹، ۱۰۷۱، ۱۰۷۳، ۱۰۷۵، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، ۱۰۸۱، ۱۰۸۳، ۱۰۸۵، ۱۰۸۷، ۱۰۸۹، ۱۰۹۱، ۱۰۹۳، ۱۰۹۵، ۱۰۹۷، ۱۰۹۹، ۱۱۰۱، ۱۱۰۳، ۱۱۰۵، ۱۱۰۷، ۱۱۰۹، ۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۱۵، ۱۱۱۷، ۱۱۱۹، ۱۱۲۱، ۱۱۲۳، ۱۱۲۵، ۱۱۲۷، ۱۱۲۹، ۱۱۳۱، ۱۱۳۳، ۱۱۳۵، ۱۱۳۷، ۱۱۳۹، ۱۱۴۱، ۱۱۴۳، ۱۱۴۵، ۱۱۴۷، ۱۱۴۹، ۱۱۵۱، ۱۱۵۳، ۱۱۵۵، ۱۱۵۷، ۱۱۵۹، ۱۱۶۱، ۱۱۶۳، ۱۱۶۵، ۱۱۶۷، ۱۱۶۹، ۱۱۷۱، ۱۱۷۳، ۱۱۷۵، ۱۱۷۷، ۱۱۷۹، ۱۱۸۱، ۱۱۸۳، ۱۱۸۵، ۱۱۸۷، ۱۱۸۹، ۱۱۹۱، ۱۱۹۳، ۱۱۹۵، ۱۱۹۷، ۱۱۹۹، ۱۲۰۱، ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۰۷، ۱۲۰۹، ۱۲۱۱، ۱۲۱۳، ۱۲۱۵، ۱۲۱۷، ۱۲۱۹، ۱۲۲۱، ۱۲۲۳، ۱۲۲۵، ۱۲۲۷، ۱۲۲۹، ۱۲۳۱، ۱۲۳۳، ۱۲۳۵، ۱۲۳۷، ۱۲۳۹، ۱۲۴۱، ۱۲۴۳، ۱۲۴۵، ۱۲۴۷، ۱۲۴۹، ۱۲۵۱، ۱۲۵۳، ۱۲۵۵، ۱۲۵۷، ۱۲۵۹، ۱۲۶۱، ۱۲۶۳، ۱۲۶۵، ۱۲۶۷، ۱۲۶۹، ۱۲۷۱، ۱۲۷۳، ۱۲۷۵، ۱۲۷۷، ۱۲۷۹، ۱۲۸۱، ۱۲۸۳، ۱۲۸۵، ۱۲۸۷، ۱۲۸۹، ۱۲۹۱، ۱۲۹۳، ۱۲۹۵، ۱۲۹۷، ۱۲۹۹، ۱۳۰۱، ۱۳۰۳، ۱۳۰۵، ۱۳۰۷، ۱۳۰۹، ۱۳۱۱، ۱۳۱۳، ۱۳۱۵، ۱۳۱۷، ۱۳۱۹، ۱۳۲۱، ۱۳۲۳، ۱۳۲۵، ۱۳۲۷، ۱۳۲۹، ۱۳۳۱، ۱۳۳۳، ۱۳۳۵، ۱۳۳۷، ۱۳۳۹، ۱۳۴۱، ۱۳۴۳، ۱۳۴۵، ۱۳۴۷، ۱۳۴۹، ۱۳۵۱، ۱۳۵۳، ۱۳۵۵، ۱۳۵۷، ۱۳۵۹، ۱۳۶۱، ۱۳۶۳، ۱۳۶۵، ۱۳۶۷، ۱۳۶۹، ۱۳۷۱، ۱۳۷۳، ۱۳۷۵، ۱۳۷۷، ۱۳۷۹، ۱۳۸۱، ۱۳۸۳، ۱۳۸۵، ۱۳۸۷، ۱۳۸۹، ۱۳۹۱، ۱۳۹۳، ۱۳۹۵، ۱۳۹۷، ۱۳۹۹، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۵، ۱۴۰۷، ۱۴۰۹، ۱۴۱۱، ۱۴۱۳، ۱۴۱۵، ۱۴۱۷، ۱۴۱۹، ۱۴۲۱، ۱۴۲۳، ۱۴۲۵، ۱۴۲۷، ۱۴۲۹، ۱۴۳۱، ۱۴۳۳، ۱۴۳۵، ۱۴۳۷، ۱۴۳۹، ۱۴۴۱، ۱۴۴۳، ۱۴۴۵، ۱۴۴۷، ۱۴۴۹، ۱۴۵۱، ۱۴۵۳، ۱۴۵۵، ۱۴۵۷، ۱۴۵۹، ۱۴۶۱، ۱۴۶۳، ۱۴۶۵، ۱۴۶۷، ۱۴۶۹، ۱۴۷۱، ۱۴۷۳، ۱۴۷۵، ۱۴۷۷، ۱۴۷۹، ۱۴۸۱، ۱۴۸۳، ۱۴۸۵، ۱۴۸۷، ۱۴۸۹، ۱۴۹۱، ۱۴۹۳، ۱۴۹۵، ۱۴۹۷، ۱۴۹۹، ۱۵۰۱، ۱۵۰۳، ۱۵۰۵، ۱۵۰۷، ۱۵۰۹، ۱۵۱۱، ۱۵۱۳، ۱۵۱۵، ۱۵۱۷، ۱۵۱۹، ۱۵۲۱، ۱۵۲۳، ۱۵۲۵، ۱۵۲۷، ۱۵۲۹، ۱۵۳۱، ۱۵۳۳، ۱۵۳۵، ۱۵۳۷، ۱۵۳۹، ۱۵۴۱، ۱۵۴۳، ۱۵۴۵، ۱۵۴۷، ۱۵۴۹، ۱۵۵۱، ۱۵۵۳، ۱۵۵۵، ۱۵۵۷، ۱۵۵۹، ۱۵۶۱، ۱۵۶۳، ۱۵۶۵، ۱۵۶۷، ۱۵۶۹، ۱۵۷۱، ۱۵۷۳، ۱۵۷۵، ۱۵۷۷، ۱۵۷۹، ۱۵۸۱، ۱۵۸۳، ۱۵۸۵، ۱۵۸۷، ۱۵۸۹، ۱۵۹۱، ۱۵۹۳، ۱۵۹۵، ۱۵۹۷، ۱۵۹۹، ۱۶۰۱، ۱۶۰۳، ۱۶۰۵، ۱۶۰۷، ۱۶۰۹، ۱۶۱۱، ۱۶۱۳، ۱۶۱۵، ۱۶۱۷، ۱۶۱۹، ۱۶۲۱، ۱۶۲۳، ۱۶۲۵، ۱۶۲۷، ۱۶۲۹، ۱۶۳۱، ۱۶۳۳، ۱۶۳۵، ۱۶۳۷، ۱۶۳۹، ۱۶۴۱، ۱۶۴۳، ۱۶۴۵، ۱۶۴۷، ۱۶۴۹، ۱۶۵۱، ۱۶۵۳، ۱۶۵۵، ۱۶۵۷، ۱۶۵۹، ۱۶۶۱، ۱۶۶۳، ۱۶۶۵، ۱۶۶۷، ۱۶۶۹، ۱۶۷۱، ۱۶۷۳، ۱۶۷۵، ۱۶۷۷، ۱۶۷۹، ۱۶۸۱، ۱۶۸۳، ۱۶۸۵، ۱۶۸۷، ۱۶۸۹، ۱۶۹۱، ۱۶۹۳، ۱۶۹۵، ۱۶۹۷، ۱۶۹۹، ۱۷۰۱، ۱۷۰۳، ۱۷۰۵، ۱۷۰۷، ۱۷۰۹، ۱۷۱۱، ۱۷۱۳، ۱۷۱۵، ۱۷۱۷، ۱۷۱۹، ۱۷۲۱، ۱۷۲۳، ۱۷۲۵، ۱۷۲۷، ۱۷۲۹، ۱۷۳۱، ۱۷۳۳، ۱۷۳۵، ۱۷۳۷، ۱۷۳۹، ۱۷۴۱، ۱۷۴۳، ۱۷۴۵، ۱۷۴۷، ۱۷۴۹، ۱۷۵۱، ۱۷۵۳، ۱۷۵۵، ۱۷۵۷، ۱۷۵۹، ۱۷۶۱، ۱۷۶۳، ۱۷۶۵، ۱۷۶۷، ۱۷۶۹، ۱۷۷۱، ۱۷۷۳، ۱۷۷۵، ۱۷۷۷، ۱۷۷۹، ۱۷۸۱، ۱۷۸۳، ۱۷۸۵، ۱۷۸۷، ۱۷۸۹، ۱۷۹۱، ۱۷۹۳، ۱۷۹۵، ۱۷۹۷، ۱۷۹۹، ۱۸۰۱، ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، ۱۸۰۷، ۱۸۰۹، ۱۸۱۱، ۱۸۱۳، ۱۸۱۵، ۱۸۱۷، ۱۸۱۹، ۱۸۲۱، ۱۸۲۳، ۱۸۲۵، ۱۸۲۷، ۱۸۲۹، ۱۸۳۱، ۱۸۳۳، ۱۸۳۵، ۱۸۳۷، ۱۸۳۹، ۱۸۴۱، ۱۸۴۳، ۱۸۴۵، ۱۸۴۷، ۱۸۴۹، ۱۸۵۱، ۱۸۵۳، ۱۸۵۵، ۱۸۵۷، ۱۸۵۹، ۱۸۶۱، ۱۸۶۳، ۱۸۶۵، ۱۸۶۷، ۱۸۶۹، ۱۸۷۱، ۱۸۷۳، ۱۸۷۵، ۱۸۷۷، ۱۸۷۹، ۱۸۸۱، ۱۸۸۳، ۱۸۸۵، ۱۸۸۷، ۱۸۸۹، ۱۸۹۱، ۱۸۹۳، ۱۸۹۵، ۱۸۹۷، ۱۸۹۹، ۱۹۰۱، ۱۹۰۳، ۱۹۰۵، ۱۹۰۷، ۱۹۰۹، ۱۹۱۱، ۱۹۱۳، ۱۹۱۵، ۱۹۱۷، ۱۹۱۹، ۱۹۲۱، ۱۹۲۳، ۱۹۲۵، ۱۹۲۷، ۱۹۲۹، ۱۹۳۱، ۱۹۳۳، ۱۹۳۵، ۱۹۳۷، ۱۹۳۹، ۱۹۴۱، ۱۹۴۳، ۱۹۴۵، ۱۹۴۷، ۱۹۴۹، ۱۹۵۱، ۱۹۵۳، ۱۹۵۵، ۱۹۵۷، ۱۹۵۹، ۱۹۶۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷، ۱۹۶۹، ۱۹۷۱، ۱۹۷۳، ۱۹۷۵، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷، ۱۹۹۹، ۲۰۰۱، ۲۰۰۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳، ۲۰۱۵، ۲۰۱۷، ۲۰۱۹، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳، ۲۰۲۵، ۲۰۲۷، ۲۰۲۹، ۲۰۳۱، ۲۰۳۳، ۲۰۳۵، ۲۰۳۷، ۲۰۳۹، ۲۰۴۱، ۲۰۴۳، ۲۰۴۵، ۲۰۴۷، ۲۰۴۹، ۲۰۵۱، ۲۰۵۳، ۲۰۵۵، ۲۰۵۷، ۲۰۵۹، ۲۰۶۱، ۲۰۶۳، ۲۰۶۵، ۲۰۶۷، ۲۰۶۹، ۲۰۷۱، ۲۰۷۳، ۲۰۷۵، ۲۰۷۷، ۲۰۷۹، ۲۰۸۱، ۲۰۸۳، ۲۰۸۵، ۲۰۸۷، ۲۰۸۹، ۲۰۹۱، ۲۰۹۳، ۲۰۹۵، ۲۰۹۷، ۲۰۹۹، ۲۱۰۱، ۲۱۰۳، ۲۱۰۵، ۲۱۰۷، ۲۱۰۹، ۲۱۱۱، ۲۱۱۳، ۲۱۱۵، ۲۱۱۷، ۲۱۱۹، ۲۱۲۱، ۲۱۲۳، ۲۱۲۵، ۲۱۲۷، ۲۱۲۹، ۲۱۳۱، ۲۱۳۳، ۲۱۳۵، ۲۱۳۷، ۲۱۳۹، ۲۱۴۱، ۲۱۴۳، ۲۱۴۵، ۲۱۴۷، ۲۱۴۹، ۲۱۵۱، ۲۱۵۳، ۲۱۵۵، ۲۱۵۷، ۲۱۵۹، ۲۱۶۱، ۲۱۶۳، ۲۱۶۵، ۲۱۶۷، ۲۱۶۹، ۲۱۷۱، ۲۱۷۳، ۲۱۷۵، ۲۱۷۷، ۲۱۷۹، ۲۱۸۱، ۲۱۸۳، ۲۱۸۵، ۲۱۸۷، ۲۱۸۹، ۲۱۹۱، ۲۱۹۳، ۲۱۹۵، ۲۱۹۷، ۲۱۹۹، ۲۲۰۱، ۲۲۰۳، ۲۲۰۵، ۲۲۰۷، ۲۲۰۹، ۲۲۱۱، ۲۲۱۳، ۲۲۱۵، ۲۲۱۷، ۲۲۱۹، ۲۲۲۱، ۲۲۲۳، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۹، ۲۲۳۱، ۲۲۳۳، ۲۲۳۵، ۲۲۳۷، ۲۲۳۹، ۲۲۴۱، ۲۲۴۳، ۲۲۴۵، ۲۲۴۷، ۲۲۴۹، ۲۲۵۱، ۲۲۵۳، ۲۲۵۵، ۲۲۵۷، ۲۲۵۹، ۲۲۶۱، ۲۲۶۳، ۲۲۶۵، ۲۲۶۷، ۲۲۶۹، ۲۲۷۱، ۲۲۷۳، ۲۲۷۵، ۲۲۷۷، ۲۲۷۹، ۲۲۸۱، ۲۲۸۳، ۲۲۸۵، ۲۲۸۷، ۲۲۸۹، ۲۲۹۱، ۲۲۹۳، ۲۲۹۵، ۲۲۹۷، ۲۲۹۹، ۲۳۰۱، ۲۳۰۳، ۲۳۰۵، ۲۳۰۷، ۲۳۰۹، ۲۳۱۱، ۲۳۱۳، ۲۳۱۵، ۲۳۱۷، ۲۳۱۹، ۲۳۲۱، ۲۳۲۳، ۲۳۲۵، ۲۳۲۷، ۲۳۲۹، ۲۳۳۱، ۲۳۳۳، ۲۳۳۵، ۲۳۳۷، ۲۳۳۹، ۲۳۴۱، ۲۳۴۳، ۲۳۴۵، ۲۳۴۷، ۲۳۴۹، ۲۳۵۱، ۲۳۵۳، ۲۳۵۵، ۲۳۵۷، ۲۳۵۹، ۲۳۶۱، ۲۳۶۳، ۲۳۶۵، ۲۳۶۷، ۲۳۶۹، ۲۳۷۱، ۲۳۷۳، ۲۳۷۵، ۲۳۷۷، ۲۳۷۹، ۲۳۸۱، ۲۳۸۳، ۲۳۸۵، ۲۳۸۷، ۲۳۸۹، ۲۳۹۱، ۲۳۹۳، ۲۳۹۵، ۲۳۹۷، ۲۳۹۹، ۲۴۰۱، ۲۴۰۳، ۲۴۰۵، ۲۴۰۷، ۲۴۰۹، ۲۴۱۱، ۲۴۱۳، ۲۴۱۵، ۲۴۱۷، ۲۴۱۹، ۲۴۲۱، ۲۴۲۳، ۲۴۲۵، ۲۴۲۷، ۲۴۲۹، ۲۴۳۱، ۲۴۳۳، ۲۴۳۵، ۲۴۳۷، ۲۴۳۹، ۲۴۴۱، ۲۴۴۳، ۲۴۴۵، ۲۴۴۷، ۲۴۴۹، ۲۴۵۱، ۲۴۵۳، ۲۴۵۵، ۲۴۵۷، ۲۴۵۹، ۲۴۶۱، ۲۴۶۳، ۲۴۶۵، ۲۴۶۷، ۲۴۶۹، ۲۴۷۱، ۲۴۷۳، ۲۴۷۵، ۲۴۷۷، ۲۴۷۹، ۲۴۸۱، ۲۴۸۳، ۲۴۸۵، ۲۴۸۷، ۲۴۸۹، ۲۴۹۱، ۲۴۹۳، ۲۴۹۵، ۲۴۹۷، ۲۴۹۹، ۲۵۰۱، ۲۵۰۳، ۲۵۰۵، ۲۵۰۷، ۲۵۰۹، ۲۵۱۱، ۲۵۱۳، ۲۵۱۵، ۲۵۱۷، ۲۵۱۹، ۲۵۲۱، ۲۵۲۳، ۲۵۲۵، ۲۵۲۷، ۲۵۲۹، ۲۵۳۱، ۲۵۳۳، ۲۵۳۵، ۲۵۳۷، ۲۵۳۹، ۲۵۴۱، ۲۵۴۳، ۲۵۴۵، ۲۵۴۷، ۲۵۴۹، ۲۵۵۱، ۲۵۵۳، ۲۵۵۵، ۲۵۵۷، ۲۵۵۹، ۲۵۶۱، ۲۵۶۳، ۲۵۶۵، ۲۵۶

آدھ گھنٹہ بعد سب، ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اُسی سمت میں چلتا ہے، تریبی طریق پر معلوم کرو کہ ب، ۱ کو کہاں اور کس وقت جا ملیگا۔

۱۲۔ ۱ صبح کے ۶ بجے ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے اور ہر تین میل کے بعد آدھ گھنٹہ آرام کرتا ہے۔ ب صبح کے ۹ بجے ۵ میل فی گھنٹہ کی مسلسل رفتار سے اڑکا پیچھا کرتا ہے، معلوم کرو کہ ب، ۱ سے کب اور کہاں جا ملیگا۔

۱۳۔ ایک سائیکل سوار صبح کے ۶ بجے حیدر آباد سے روانہ ہو کر بیدر کی سڑک پر ۱۱ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے مسلسل $2\frac{1}{2}$ گھنٹے سفر کرتا ہے، اس کے بعد وہ آدھ گھنٹہ آرام کر کے ۹ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے واپس آتا ہے، ایک دوسرا سائیکل سوار ۱ بجے صبح ۷ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حیدر آباد سے روانہ ہوتا ہے، بتاؤ کہ وہ دونوں کب اور کہاں ملیں گے۔

۱۴۔ دو سائیکل سوار ایک گول چکر کے گرد جس کا محیط ایک میل ہے $1\frac{1}{2}$ میل اور ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک ہی نقطہ سے ایک ہی سمت میں روانہ ہوئے ہیں، بتاؤ کہ وہ ۳ گھنٹے میں ایک دوسرے سے کتنی دفعہ اور کہاں ملیں گے۔



۱۵۔ بتاؤ کہ ۲

اور ۳ بجے کے

درمیان گھڑی

کی سوئیاں کب

(۱) ایک دوسرے

پر منطبق ہونگی

اور (۲) ایک

دوسرے سے

۴۵ اور ۶۰

کے زاویے

بنائیں گی۔

ظاہر ہے کہ

جب چھوٹی سوئی ۵ منٹی فاصلے طے کرتی ہے تو بڑی سوئی پورا چکر لگا لیتی ہے یعنی ۶۰ منٹی فاصلے طے کرتی ہے، گویا ایک گھنٹہ میں بڑی سوئی چھوٹی سوئی کی نسبت ۵۵ منٹی فاصلے زیادہ چلتی ہے۔

افقی محور پر وقت کو تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ (۱۱ - ۱۰) منٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ نیز چونکہ ہمیں ۲ بجے اور ۳ بجے کے درمیان فی وقت سے سروکار ہے اس لئے ہم ۲ بجے کو ابتدائی نقطہ سے تعبیر کرتے ہیں۔

انتصابی محور پر فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ ۲ منٹی فاصلوں کو ظاہر کرتا ہے اب چونکہ ۲ بجے بڑی سوئی نشان ۱۲ پر ہے اور ۶۰ منٹ میں یعنی ۳ بجے تک ۶۰ منٹی فاصلے طے کرتی ہے اس لئے ۲ بجے اور ۳ بجے کے درمیان اس کی ترسیم و م نقاط (۲، ۶۰) اور (۳، ۶۰) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے، نیز چونکہ ۲ بجے گھنٹے کی سوئی ۱۲ بجے کے نشان سے ۱۰ منٹی فاصلوں پر ہوگی اور ۶۰ منٹ میں صرف ۵ منٹی فاصلے طے کر چکی اس لئے اس کی ترسیم خط گ ن نقاط (۲، ۱۰) اور (۳، ۱۵) کو ملانے سے حاصل ہوگی۔ یہ دونوں خط نقطہ ق پر قطع کرتے ہیں، پس نقطہ ق کا فاصلہ ول اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جب گھڑی کی سوئیاں ایک دوسرے پر منطبق ہوئیں۔ ترسیم کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ سوئیاں تقریباً ۲ بج کر ۱۱ منٹ پر ایک دوسرے پر منطبق ہوئیں گی۔ ٹھیک قیمت ۲ بج کر ۱۱ - ۱۰ منٹ ہے۔

نیز جب کوئی سوئی ۶۰ منٹی فاصلے طے کرتی ہے تو ۶۰ منٹ کے زاویہ میں سے گزرتی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ جب ۲ بجے کے بعد سوئیوں کے درمیان ۴۵ کا زاویہ ہوگا تو بڑی سوئی چھوٹی سوئی سے ۱۰ منٹی فاصلے آگے ہوگی۔ اب افقی محور پر نقطہ ط جو ۲ بج کر تقریباً ۹ و ۱۹ منٹ ظاہر کرتا ہے ایسا ہے کہ اس کے معینوں ط ط اور ط ط کا فرق ۱۰ منٹی فاصلوں کے برابر ہے اس لئے ۲ بج کر ۱۹ منٹ کے بعد گھڑی کی سوئیوں میں ۴۵ کا زاویہ بنے گا۔

اسی طرح ۶۰ کا زاویہ ۲ بج کر ۸ و ۲۱ منٹ پر بنے گا۔

۱۶۔ بتاؤ کہ ۷ بجے اور ۸ بجے کے درمیان گھڑی کی سوئیاں کب (۱۱) ایک دوسرے کے مقابل ہوئیں گی (۱۲) ان کا درمیان فی فاصلہ ۵ منٹی نشانوں کے مساوی ہوگا

اب کیا ہو جائیں گے۔

۲۶۔ ایک گرامو فون مع ۵ توں کے ۷ پونڈ میں آتا ہے، اسی گرامو فون کی قیمت مع ۲۰ توں کے ۹ پونڈ ہے، بتاؤ کہ گرامو فون مع ۵۰ توں کے کتنے میں آئے گا۔

[سول سر دس]

۲۷۔ اینچ اور سنتی میٹر، پونڈ اور کلو گرام کے باہمی ربط کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو، معلوم ہے ایک اینچ = ۲.۵۴ سنتی میٹر اور ایک کلو گرام = ۲.۶۲ پونڈ، شکل سے معلوم کرو کہ ۶.۲۵ سنتی میٹر، ۹.۵۱ سنتی میٹر کتنے اینچوں کے مساوی ہیں، نیز ۸ پونڈ کتنے کلو گراموں کے مساوی ہے۔

۲۸۔ ۶۲ میل = ایک کلو میٹر، ان کے باہمی ربط کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو۔ ۴۱۵ اور ۵۵۰ میل کلو میٹروں میں بیان کرو، جواب قریب ترین دسویں کلو میٹر تک صحیح ہو۔

۲۹۔ رومر تپش پیا میں نقطہ انجماد صفر درجہ پر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۸۰ درجہ پر، فارن ہیت میں نقطہ انجماد ۳۲ درجہ پر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۲۱۲ درجہ پر، رومر اور فارن ہیت کے درجوں کی باہمی تحویل کے لئے ترسیم بناؤ، ۶۵° س کو ف درجوں میں منتقل کرو اور ۵۰° ف کو س، درجوں میں۔

۳۰۔ ایک مثلث ا ب ج کے قاعدہ کے متوازی کئی خط کھینچو، ۱ کو مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ د سے ملاؤ یہ وسطی ۱ د سب متوازیات کی تنصیف کرتا ہے، فرض کرو کہ

ایک متوازی سی ن ق ہے اور اس کا

وسطی فاصلہ ۱ سے ۱ ع ہے، وسطی

فاصلوں کو بطور فضلہ اور متوازیات

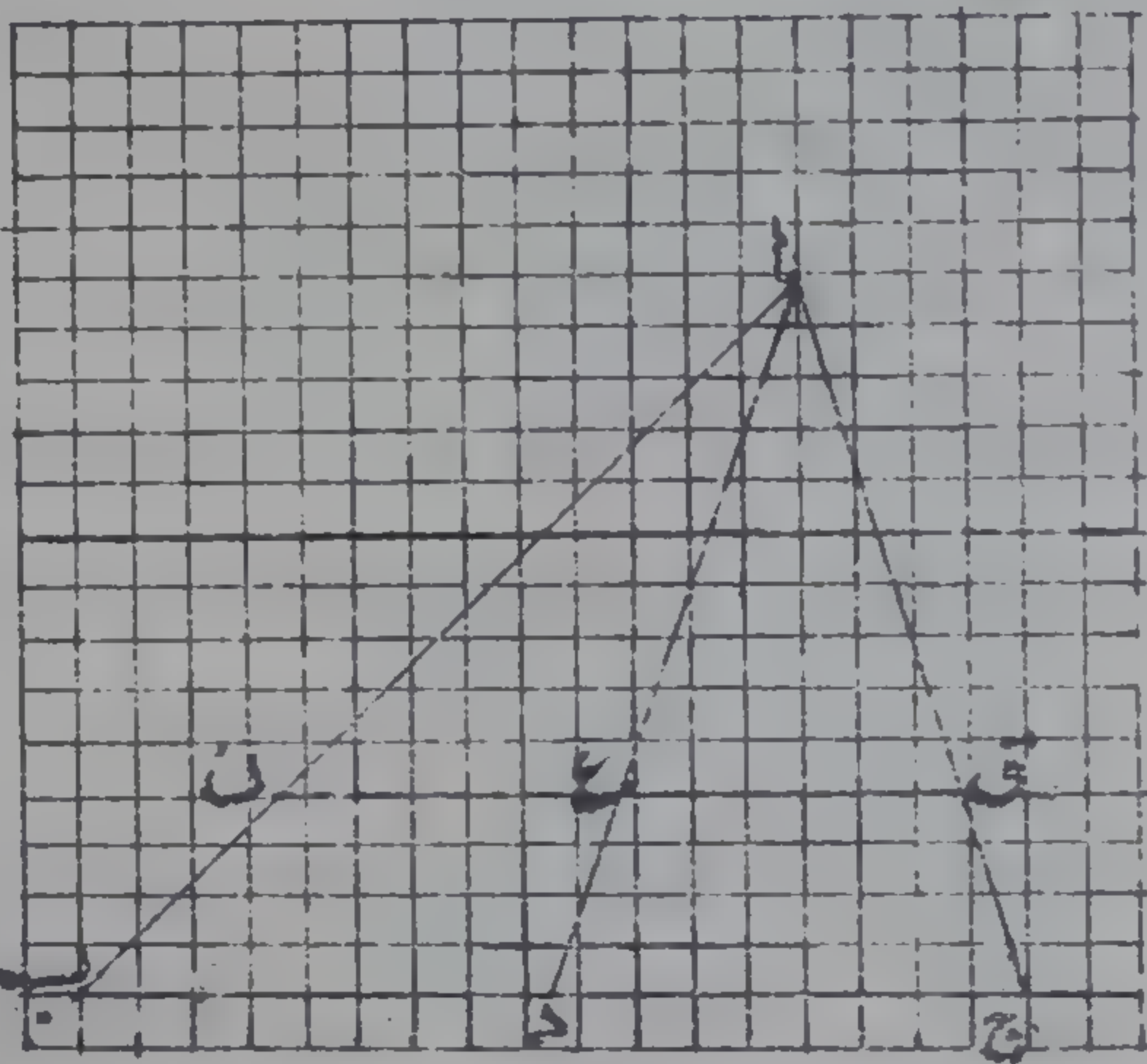
کے طولوں کو بطور معین مان کر نقطے

م ترسیم کرو اور ترسیم بنانے سے ثابت

کرو کہ متوازیات کے طول اپنے

وسطی فاصلوں کے متناسب ہیں،

ترسیم سے اس متوازی کا طول معلوم



کر جس کا فاصلہ ۱ سے $\frac{۳}{۴}$ انچ ہو۔
۳۱۔ ترسیعی طریق پر ثابت کرو کہ ایک دائرہ کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع

کے متناسب ہوتا ہے۔

کئی دائرے مربع دار کا غڈ پر بناؤ، مربع گننے سے ان کے رقبے معلوم کرو
محور لا پر (نصف قطر) کی قیمتیں اور محور صا پر ان کے متناظر دائروں کے رقبے نابود وغیرہ

۳۲۔ ایک سرچ کے ذریعہ مختلف وزن اٹھانے میں جو قوتیں لگانی پڑتی ہیں وہ تجربہ
کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور حسب ذیل ہیں۔

وزن پونڈوں میں	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
قوت	۰.۵۶	۱.۱۱۵	۱.۵۸	۲.۳۳	۲.۶۹	۳.۲۵

ان کو مرتب کرنے سے دیکھو کہ قوت اور وزن قریب قریب متناسب ہیں، معلوم کرو کہ ۴۵
پونڈ وزن کو اٹھانے کے لئے کیا قوت درکار ہوگی۔
۳۳۔ ایک مشین میں مختلف وزنیوں کو اٹھانے کے لئے جو زور درکار ہوتے ہیں
ان کی قیمتیں جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

وزن و	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
زور و	۱۰۶	۱۲۲	۱۵۲	۱۸۴	۲۱۶	۲۴۶	۲۷۸

زور و

ان قیمتوں سے نقطے مرتب کرو اور یہ مان کر کہ وزن اور زور میں خطی کلیہ $ز = او + ب$
پایا جاتا ہے، $ا$ اور $ب$ کی قیمتیں معلوم کرو، ترسیم سے اور نیز مساوات سے قریب
ترین صحیح عدد تک نہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ $و = ۳۵۰$ اور $و$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ
[سول سروس]
ز = ۱۵۸۔

۳۴۔ چرخوں کے ایک نظام میں زور اور وزن کا اچھی ربط معلوم کرنے کے لئے
تجربہ کی بنا پر اعداد ذیل حاصل کئے گئے ہیں۔

۶۳	۵۶	۴۹	۴۲	۳۵	۲۸	۲۱	۱۴	۷	وزن، و
۲۰۵۸	۱۸۵۵	۱۶۵۵	۱۴۵۴	۱۱۵۹	۱۰۵۱۱	۸۵۲	۵۵۸۳	۳۵۸	زور، ز

دیکھو کہ ز اور و میں خطی کلیہ $ز = و + ۱$ با موجود ہے یا نہیں، اگر ہو تو لا اور ب کی بہترین قیمتیں معلوم کرو۔

۳۵۔ لا اور ما کی قیمتیں تجربہ کی بنا پر معلوم کی گئی ہیں، ان میں سے بعض قدرے غلط ہیں، ان کے ربط کو ظاہر کرنے والی مناسب ترین ترسیم کھینچو۔

۱۵	۱۳	۱۱	۹۵۵	۷	۵۵۵	۴	۱	لا
۲۳۵۲	۲۱	۱۸۵۳	۱۵۵۲	۱۳	۱۰۵۷	۸	۳۵۵	ما

ما کی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ۳۵ اور لا کی قیمت معلوم کرو جبکہ ما = ۴۲۔

۳۶۔ برقی رو کی مدد سے چلنے والے ایک پمپ کی جانچ کرنے سے نتائج ذیل حاصل ہوئے، اگر ق برقی، اسی قوت پمپ پر لگائی جائے تو ب اسی قوت فی الحقیقت پانی اٹھانے میں صرت ہوتی ہے۔

۱۱۵۷۳	۹۵۸۷	۷۵۸۵	۵۵۶۳	۳۵۵۷	ق
۶۵۷۵	۵۵۷	۴۵۳	۲۵۷۵	۱۵۵	ب

ق اور ب کا باہمی ربط معلوم کرو۔

۳۷۔ پوسے کے ایک نل کے وزن فی فٹ جبکہ نل کی موٹائی $\frac{1}{4}$ اینچ ہو جدول ذیل میں درج ہے

۵	۴۵۵	۴	۳۵۵	۳	۲۵۵	۲	۱۵۵	۱	قطر، ق
۲۷	۲۴۵۵	۲۲۵۱	۱۹۵۴	۱۷۵۲	۱۴۵۷	۱۲۵۳	۹۵۸	۷۵۴	وزن، و

اس میں ق نل کے کھوکھلے حصہ کا قطر ہے، انچوں میں اور وزن ہے پونڈوں میں،
ایک ترسیم کھینچو جو ق اور و کے باہمی ربط کو تعبیر کرے اور اس نل کا وزن فی فٹ
معلوم کرو جس کا قطر $\frac{1}{4}$ ۳ انچ ہو۔
(سول سروس)

عام ترسیمیں

۲۷۔ پچھلی چند دفعات میں ہم نے دیکھا کہ اگر وہ بدلنے والی مقداریں باہم
اس طرح متعلق ہوں کہ ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسری کی قیمت میں
ایک تناظر تبدیلی پیدا کرے تو ان مقداروں کی تناظر قیمتوں کے مختلف
جوڑوں سے مختلف نقطے مرتسم کئے جاسکتے ہیں اور ان نقطوں کو ایک خط
کے ذریعہ ملانے سے ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے جو ان مقداروں کے
تغیرات کو ہندسی طریق پر ظاہر کرتی ہے، اوپر کی سب مثالوں میں یہ نقطے قریب
قریب ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے تھے جو ترسیمی تعبیر کی ایک خاص صورت
ہے، لیکن ہم آگے چل کر دیکھیں گے کہ کسی دو متغیروں کی تناظر قیمتوں سے
جو نقطے حاصل ہوں گے وہ عام طور پر ایک خط مستقیم پر واقع نہیں ہونگے
بلکہ بظاہر بقاعدہ طور پر مختلف سمتوں میں اور مختلف فاصلوں پر اوپر چھکے ہوں گے
واقع ہونگے۔ جب ترسیم پر کے نقطے ایک مساوات سے حاصل کئے جائیں
تو وہ تعداد میں بشمار ہونگے کیونکہ مساوات کے حل بشمار ہیں، اس لئے اس
صورت میں نقطے ایک دوسرے سے اتنا قریب ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں
اور نزدیک نزدیک کے نقطوں میں سے ایک مسلسل مچنی گزر سکتا ہے،
پس معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی ترسیم ہمیشہ مسلسل ہوگی۔
لیکن جب متغیروں کی قیمتیں تجربہ یا مشاہدہ کی بنا پر معلوم کی جائیں تو ظاہر
ہے کہ اولاً ان کی قیمتیں بالکل صحیح نہیں ہونگی، غلطی کا احتمال ان پر ضرور
باقی رہے گا، اس لئے ان قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہونگے ان کے
مقامات کی صحت پر ہم پورا اعتبار نہیں کر سکتے۔ دوسرے چونکہ مشاہدات
کی تعداد لا انتہا نہیں ہو سکتی، اس لئے ضروری ہے کہ ہیں تناظر قیمتوں

کے محدود جوڑے ملیں اور ان سے جو نقطے حاصل ہوں وہ بھی تعداد میں محدود ہوں، اس حصہ کی مثالیں اکثر اعداد و شمار اور طبیعی مقادیر کے باہمی روابط پر مشتمل ہونگی۔ یہ اعداد و شمار بالعموم مشاہدہ اور تجربہ سے حاصل ہوں گے، اس لئے ان کے متعلقہ نقطوں کی تعداد بھی محدود ہوگی، ہم دیکھیں گے کہ خاص کر اعداد و شمار کے سوالوں میں ان نقطوں کی تعداد آٹھ یا دس سے شاذ و نادر ہی زیادہ ہوگی۔

پس فرض کرو کہ کسی خاص سوال سے ہم نے آٹھ یا دس نقطوں کو ایک شکل میں دو قائم محوروں کے لحاظ سے مرتب کر لیا ہے اور یہ نقطے شکل میں موجود ہیں، اب یہ سوال ہے کہ ان نقطوں کو کس طرح ملایا جائے کہ ترسیم مطلوبہ حاصل ہو جو مقادیر زیر بحث کے ربط کو صحیح طور پر ظاہر کرے۔

(۱) پہلا طریقہ یہ ہے کہ نقطوں کو بالترتیب خطوط مستقیم سے ملایا جائے۔ دو نقطوں کو ملائے سے ایک خط حاصل ہوگا اور آٹھ نقطوں کو اس طرح ملائے سے سات سیدھے خط ملیں گے جو ایک دوسرے سے کوئی زاویہ بنائیں گے، پس ترسیم اس صورت میں ایک بے قاعدہ شکستہ خط ہوگی جس میں ترسیم کی سمت ہر نقطہ مرتبہ پر یک نخت بدلے گی، بتدی کے لئے بہتر ہوگا کہ اعداد و شمار اور قیمتوں کی ترسیمیں بنانے میں مختلف نقطوں کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ہی ملائے، کسی اخباروں میں موسم کے حالات کے متعلق چارٹ یا نقشے شائع ہوتے ہیں ان میں وقت اور بار پیمائے کے ارتفاع کی متناظر قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں ان کو بالعموم سیدھے خطوط سے ہی ملایا جاتا ہے۔

(۲) دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ان متعدد نقطوں میں سے ایک سادہ ترین مسلسل منحنی کھینچنے کی کوشش کی جائے، دفعہ ۲۱ میں ہم نے چند ایسی مثالیں حل کی ہیں جہاں مقادیر متعلقہ کو مرتب کرنے سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ قریب قریب ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، ہم نے ان کے عین درمیان میں سے مناسب ترین خط مستقیم کھینچ کر مقداروں کے

رابطہ کو اس سے ظاہر کیا۔ لیکن جب یہ نقطے اس طرح ایک خط مستقیم کے ساتھ ساتھ واقع نہ ہوں اور تعداد میں بھی محدود ہوں تو اس صورت میں اس منحنی کا معلوم کرنا جو صحیح طور پر مقداروں کے تغیرات کو تعبیر کرے ذرا مشکل امر ہے، کیونکہ نقاط مرتسمہ کی محدود تعداد میں سے کئی منحنی گزارے جاسکتے ہیں، یہ صرف مشق پر مبنی ہے کہ کسی خاص صورت میں طالب علم ان محدود نقطوں میں سے گزرنے والے ”سادہ ترین منحنی“ کا انتخاب کر سکے، بہر حال تمام صورتوں میں بہتریں تجویز یہ ہوگی کہ ہاتھ سے ہی ایک ایسا مسلسل منحنی کھینچنے کی کوشش کی جائے جو نقاط کے اضافی مقامات کا لحاظ کرتے ہوئے مناسب ترین ہو۔

ظاہر ہے کہ یہ منحنی بعض بعض نقطوں میں سے گزرے گا اور باقی یکساں طور پر اس کے دونوں جانب واقع ہونگے۔ یہ مناسب ترین منحنی حدود ترسیم کے اندر متعلقہ مقادیر کے رابطہ کو اوسط درجہ صحت تک تعبیر کرے گا اور بعض حالتوں میں ہم اس کی مساوات مقادیر کے جبر یہ رابطہ کو بھی معلوم کر سکیں گے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم مطلوبہ حاصل کرنے کے لئے نقطہ زیر بحث کو دو طرح سے ملایا جاسکتا ہے خطوط مستقیم کے ذریعہ یا ایک مسلسل منحنی سے، لیکن ظاہر ہے کہ نقطوں میں سے گزرنے والا مسلسل منحنی مقداروں کے رابطہ کو زیادہ صحیح طور پر ظاہر کرے گا۔ کیونکہ اس میں منحنی کا انحناء یا جھکاؤ بالترتیب کم یا زیادہ ہوگا اور سمت کی تبدیلی اس میں دفعۃً واقع نہیں ہوگی جیسے شکستہ ترسیم میں جو اکثر اوقات آہ کے دندانوں کی طرح ہوتی ہے۔ طالب علم جیسے ترسیمی تعبیر میں آگے ترقی کرے گا اُسے معلوم ہوگا کہ معمولی مساواتوں کی ترسیمیں جو اکثر اوقات عام اور طبعی عملوں کو تعبیر کرتی ہیں صاف، بے کوثر، مسلسل منحنی ہوتی ہیں، ان میں جھکاؤ بتدریج پیدا ہوتا ہے، جب ہم کسی طبعی عمل یا رابطہ کو ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرنا چاہیں تو یاد رہے کہ ترسیم میں تیز زاویے اور دندانے نہیں ہونے چاہئیں۔ اس صورت میں نقاط مرتسمہ کو سیدھے خطوط سے ملانے کی بجائے حتی الوسع مسلسل منحنی سے ملانے کی کوشش کی جائے، کہ ہوائی کی تپش اور بار پیا کے ارتفاع کو ترسیم کرنے کے لئے کئی خود رسمی آلات آج کل مروج ہیں

طالب علم دیکھے کہ ان آلات کے مرتبہ خطوط میں تیز زادے اور سمست کا ایک لخت بدلتا نہیں پایا جاتا۔

۲۸۔ اعداد و شمار کی ترسیہیں۔ ایک ملک کی آبادی محال،

اخراجات و درآمد برآمد، تعداد مدارس، تعداد طلبہ وغیرہ سب اعداد و شمار کی مثالیں ہیں، ظاہر ہے کہ ان میں سے کسی ایک کو ایک متغیر اور وقت کو دوسرا متغیر فرض کر کے ہم ہر صورت میں ترسیم باسانی بنا سکتے ہیں، ترسیہی تقیر کا عملی فائدہ اور دلچسپ استعمال زیادہ اسی میں ہے کہ مختلف اعداد و شمار کی ترسیہیں بنائی جائیں اور ان سے کارآمد نتائج اخذ کئے جائیں۔

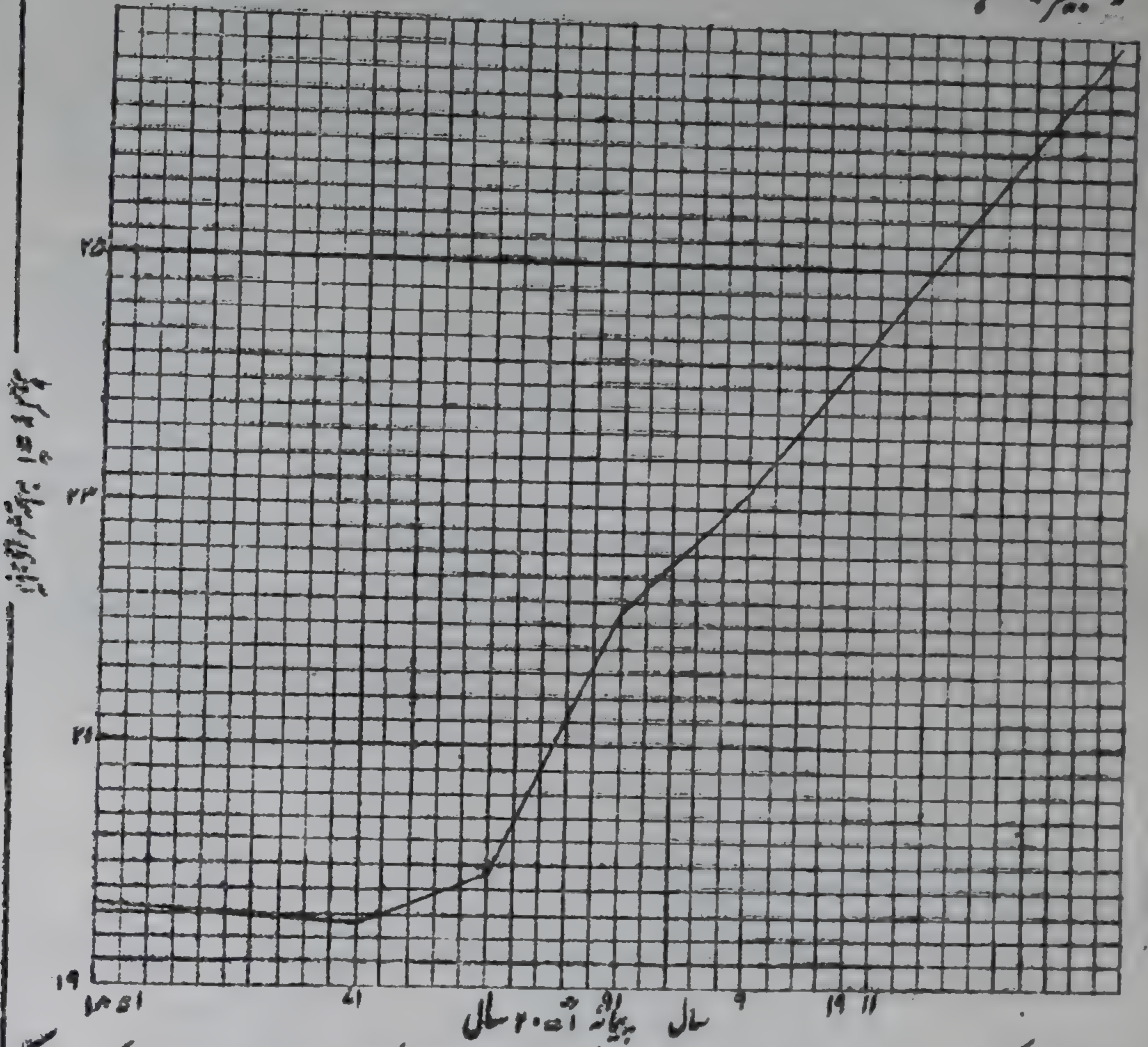
چند تو صنیعی مثالیں طالب علم کو ترسیات کی اس شاخ کی دلچسپی اور اہمیت سے پورا واقف کر دیں گی اور وہ ان کے استعمال سے پورا فائدہ اٹھا سکے گا۔

مشق ۱۔ برٹش انڈیا کی آبادی کروڑوں میں سنہ ۱۸۶۱ اور ۱۹۱۱ کے درمیان جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

سال	۱۸۶۱	۱۸۷۱	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
آبادی	۱۹۵۶۰۰	۱۹۵۵۸۴	۱۹۶۹۲۰	۲۳۶۱۳۸	۲۳۵۱۶۱	۲۴۶۴۲۶

اس کو ترسیہی طریق پر تقیر کرو، اگر آبادی کی کمی بیشی کی شرح دو متصل مردم شماروں کے درمیان یکساں فرض کی جائے تو (۱) معلوم کرو کہ ۱۸۵۷، ۱۸۸۹، ۱۹۰۳ میں اس کی آبادی کیا تھی۔ (۲) ۱۹۱۳، ۱۹۲۱ میں اس کی آبادی کیا ہوگی (۳) ترسیم کو دیکھنے سے معلوم کرو کہ اس کی آبادی ۲۶ کروڑ کب ہوگی (۴) نیز معلوم کرو کہ کن دو مردم شماروں کے درمیان شرح اضافہ زیادہ سے زیادہ ہے۔

دقت یعنی سالوں کو محور لا پڑنا پڑے۔ پیمانہ $1 = 20$ سال یعنی ایک چھوٹا حصہ 20 سال کو تعبیر کرتا ہے۔



نیز آبادی کو محور صاف پر نا پڑے۔ پیمانہ $1 = 2$ کروڑ اس میں ایک چھوٹا حصہ 2 کروڑ کو تعبیر کرتا ہے۔

ہمیں فصلوں کو 1891 سے نا پڑنا شروع کرنا چاہیے کیونکہ جدول میں پہلی آبادی اسی سال سے شروع ہوتی ہے، لیکن چونکہ ہمیں 1851 کی آبادی شکل سے معلوم کرنا ہے، اس لئے فصلوں کو 1851 سے نا پڑنا مناسب ہوگا، نیز ہمیں 1921 کی آبادی معلوم کرنا ہے، اس لئے شکل کے آخر میں اس کی گنجائش رکھنی چاہیے، اس لحاظ سے افقی محور کو اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ 1851 انگ کے تمام سال اسی میں آجائیں۔

نیز جدول میں کم سے کم آبادی ۱۹۵۶۰۰ کروڑ ہے، اس لئے انتصابی محور پر معینوں کو ۱۹ سے ناپنا مناسب ہوگا۔

اب ہم نقاط (۱۸۶۱، ۱۹۵۶۰۰) (۱۸۷۱، ۱۹۵۸۳) وغیرہ کو مرسم کرتے ہیں، اس طرح ہیں ۶ نقطے حاصل ہوتے ہیں جن کو حسب دفعہ ۲۷ خطوط مستقیم کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے، اس سے یہ مراد ہے کہ ہر دس سال کے عرصہ میں آبادی یکساں طور پر بڑھتی رہے۔ ۱۸۵۷ کی آبادی معلوم کرنے کے لئے ترسیم کے پہلے خط کو پیچھے کی طرف نقطوں کے ذریعہ خارج کرو اور دیکھو کہ افقی محور پر جو نشان ۱۸۵۷ کو بتدیر کرتا ہے اس پر کا معین ترسیم کو تقریباً ۳ حصے افقی محور سے اوپر کاٹا ہے اب چونکہ معین ۱۹ کروڑ سے ناپے گئے ہیں اس لئے ۱۸۵۷ کی آبادی = ۱۹۵۶۱ کروڑ تقریباً، لیکن یاد رہے کہ پہلے خط کو پیچھے کی طرف خارج کرنے سے ہم نے فرض کر لیا ہے کہ ۱۸۶۱ سے پہلے چند سالوں میں آبادی کی شرح تبدیلی وہی رہے جو ۱۸۶۱ اور ۱۸۷۱ کے درمیان رہے۔

اسی طرح ۱۸۸۹ کی آبادی ۲۱۵ کروڑ ہے

۱۹۰۳ " " ۲۳۵ کروڑ ہے

اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ۱۹۱۱ کے بعد بھی آبادی کے اضافہ کی شرح وہی رہے گی جو اس سے پہلے دس سالوں میں ہم نے مان لی ہے تو اس بنا پر

۱۹۱۳ میں آبادی ۲۴۸ کروڑ ہوگی

۱۹۲۱ " " ۲۵۹ کروڑ ہوگی

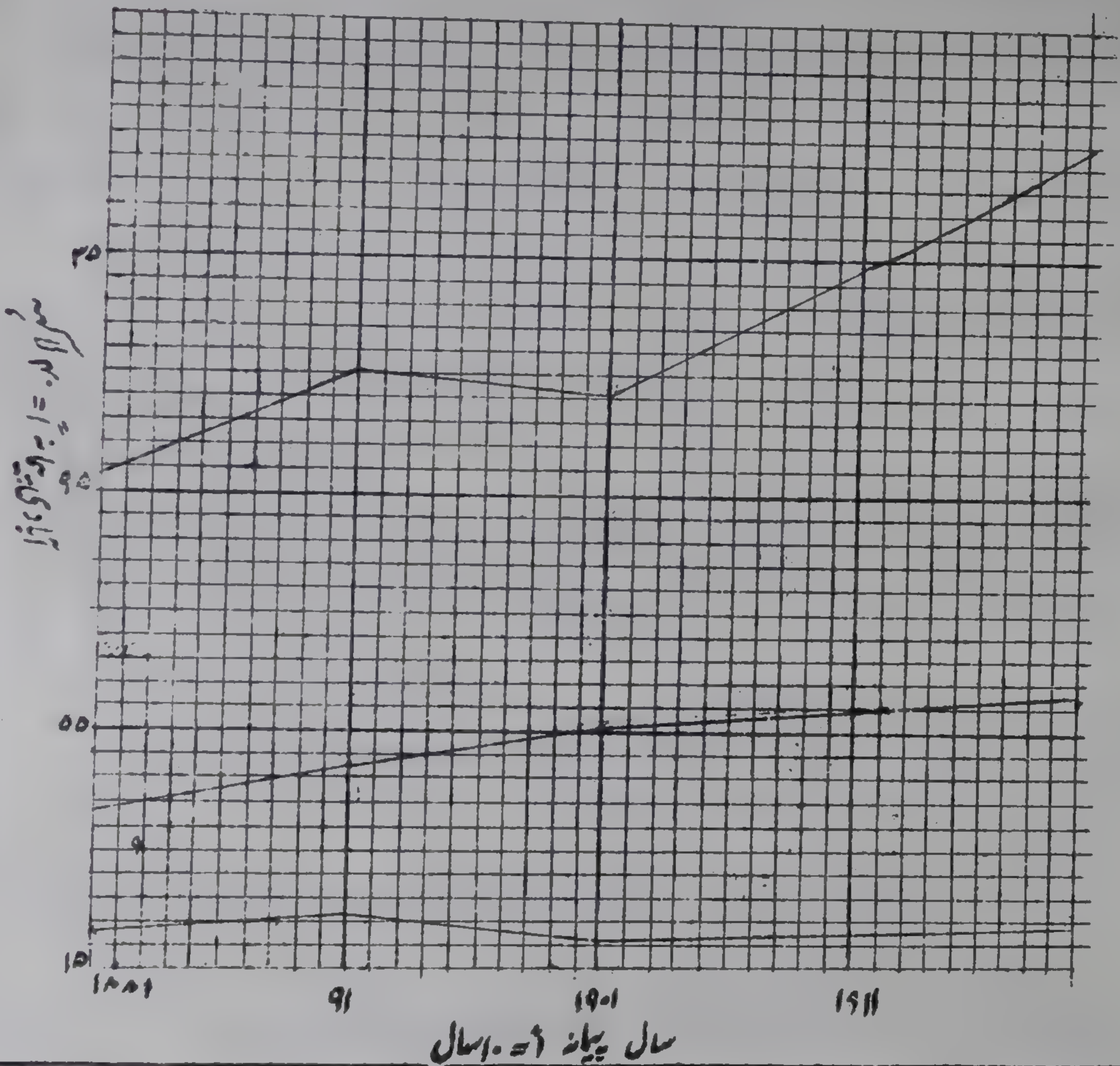
یہ معلوم کرنے کے لئے کہ آبادی ۲۶ کروڑ تک ہوگی ہم محور کا پر کے ۲۶ کروڑ والے نشان میں سے ایک خط افقی محور کے متوازی کھینچتے ہیں، جہاں یہ خط ترسیم سے ملتا ہے اس نقطہ کا فاصلہ مطلوبہ سال کو ظاہر کرے گا یہ فاصلہ ۱۹۲۱ سے کچھ زیادہ ہے، پس ۲۶ کروڑ کی آبادی ۱۹۲۱ اور ۱۹۲۲ کے درمیان ہوگی۔

شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۱۸۶۱ سے ۱۸۷۱ تک آبادی قریب قریب مستقل رہتی رہے کیونکہ یہ خط تقریباً افقی ہے پھر ۱۸۷۱ سے ۱۸۸۱ تک بڑھتی رہے، ۱۸۸۱ سے ۱۸۹۱ تک بہت سرعت سے بڑھتی رہے کیونکہ ان سالوں کا درمیانی خط

اور خطوں کی نسبت مقابلتہ زیادہ عمودی ہے، پھر ۱۸۹۱ء سے ۱۹۱۱ء تک آبادی کا اضافہ قریب قریب مستقل ہے۔

مشق ۲۔ ممالک محروسہ سرکار عالی حیدر آباد دکن، ریاست میسور اور بڑودہ کی آبادیاں لاکھوں میں ۱۸۸۱ء اور ۱۹۱۱ء کے درمیان جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
ریاست حیدر آباد دکن	۹۸۵۵	۱۱۵۵۴	۱۱۱۵۴	۱۳۳۵۷
ریاست میسور	۴۱۵۹	۴۹۵۴	۵۵۵۴	۵۸۵۴
ریاست بڑودہ	۲۱۶۸	۲۴۶۲	۱۹۶۵	۳۰۶۳



ان اعداد کو ایک ہی شکل میں ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ (۱) ۱۸۸۵ اور ۱۹۰۸ میں تینوں ممالک کی آبادیاں کیا تھیں، (۲) اگر آبادی کے اضافہ کی شرح یکساں رہے تو بتاؤ کہ ۱۹۱۵ اور ۱۹۲۱ میں ان کی آبادیاں کیا ہونگی، (۳) نیز معلوم کرو کہ ممالک محروسہ کی آبادی $\frac{1}{4}$ ا کروڑ تک ہو جائے گی۔

سالوں کو افقی محور پر تعبیر کرو، پیمانہ $10 = 10$ سال اور فاصلوں کو ۱۸۸۱ سے ناپنا شروع کرو، آبادی کو محور ما پر ناپو، پیمانہ $10 = 10$ لاکھ یعنی ایک چھوٹا حصہ $10 = 10$ لاکھ اور چونکہ جدول میں سب سے چھوٹی آبادی ۱۹۵۵ لاکھ ہے اس لئے سینوں کو ۱۵ لاکھ سے ناپنا مناسب ہوگا دیکھو شکل۔ اسی پیمانہ کے بموجب جدول بالا کے سب نقطے مرتب کئے گئے ہیں اور ان کو خطوط مستقیم تے بموجب جدول بالا کے ذریعے ملانے سے آبادیوں کی ترسیم حاصل کی گئی ہیں ترسیم کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۱۸۸۵ میں حیدرآباد کی آبادی تقریباً ۱۰۵ لاکھ تھی، میسور کی ۴۴ لاکھ، بڑودہ کی تقریباً $\frac{2}{3}$ لاکھ

۱۹۰۸ " " " ۱۲۷ " " ۵۷۵ " " $\frac{1}{4}$ لاکھ
۱۹۱۵ " " " ۱۴۲۵۶ لاکھ ہوگی ۵۹۵۶ لاکھ، " ۲۲ لاکھ
اگر محور ما پر کے $\frac{1}{4}$ ا کروڑ والے نشان میں سے ایک افقی خط کھینچا جائے تو وہ ترسیم سے نقطہ د پر ملے گا، د کا فاصلہ مطلوبہ سال تعبیر کرتا ہے جو ۱۹۱۸ سے کچھ زیادہ ہے، پس ممالک محروسہ کی آبادی ۱۹۱۸ اور ۱۹۱۹ کے درمیان ڈیڑھ کروڑ ہو فی چاہیئے۔

مشق ۳۔ ممالک محروسہ سرکار عالی ریاست حیدرآباد دکن کے سرکاری مدرسوں میں ۱۳۲۱ فضلی سے ۱۳۲۷ فضلی تک ہر سال کے آخر میں طلبہ کی جو تعداد تھی وہ جدول ذیل میں درج ہے۔

سال	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷
تعداد طلبہ	۶۵۱۰۴	۶۹۶۷۲	۷۶۵۸۲	۸۲۷۷۸	۹۳۲۸۹	۱۲۰۶۷۳	۱۸۲۹۸۶

ان اعداد کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ ۲ لاکھ کی تعداد کس سال میں ہوگی۔ نیز

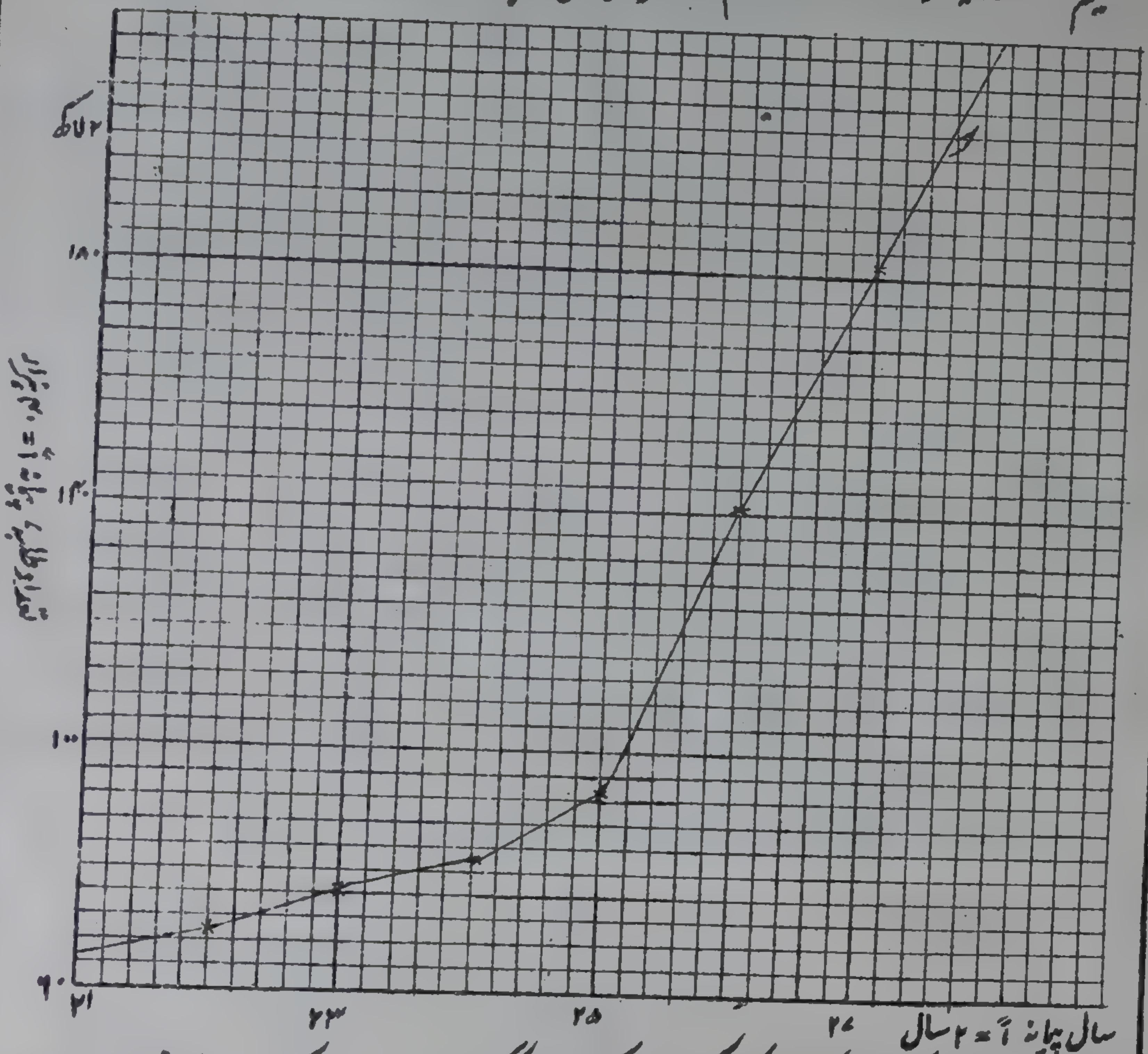
ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ کس سال کے دوران میں طلبہ کی تعداد میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا
 حسب سابق سانوں کو محور لا پر تعبیر کر دیا جائے $2 = \text{سال}$ ، فاصلوں کو

۲۱ سال سے ناپنا شروع کرو۔

تعداد طلبہ کو محور ما پر ناپنا، پیمانہ $1 = 20$ ہزار اور معینوں کو 60 ہزار سے

ناپنا شروع کرو۔

ان پیمائشوں کے موافق جدول بالا کے نقطے مرتسم کئے گئے ہیں اور ان کو خطوط
 مستقیم کے ذریعہ ملانے سے ترسیم حاصل کی گئی ہے۔



یہ معلوم کرنے کے لئے کہ 2 لاکھ کی تعداد کب ہوگی محور ما پر 2 لاکھ والے نشان میں
 سے افقی محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو ترسیم سے نقطہ اوپر ملے، تب نقطہ او کا
 فاصلہ سال مطلوبہ کو ظاہر کرے گا پس 2 لاکھ کی تعداد 28 سال فاصلی کے اختتام سے پہلے

ہو جائے گی۔

کسی ایک سال مثلاً ۱۳۲۲ ف میں طلبہ کی تعداد میں جو اضافہ ہوا وہ ۱۳۲۳ ف اور ۱۳۲۴ ف کے معینوں کے فرق سے بقیہ ہوتا ہے۔ پس شکل سے ظاہر ہے کہ ۱۳۲۵-۱۳۲۶ ف میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا۔

۲۹- قیمتیں۔ قیمتوں کی کئی مثالیں علم حساب کے متعلق خطی کلیہ کے

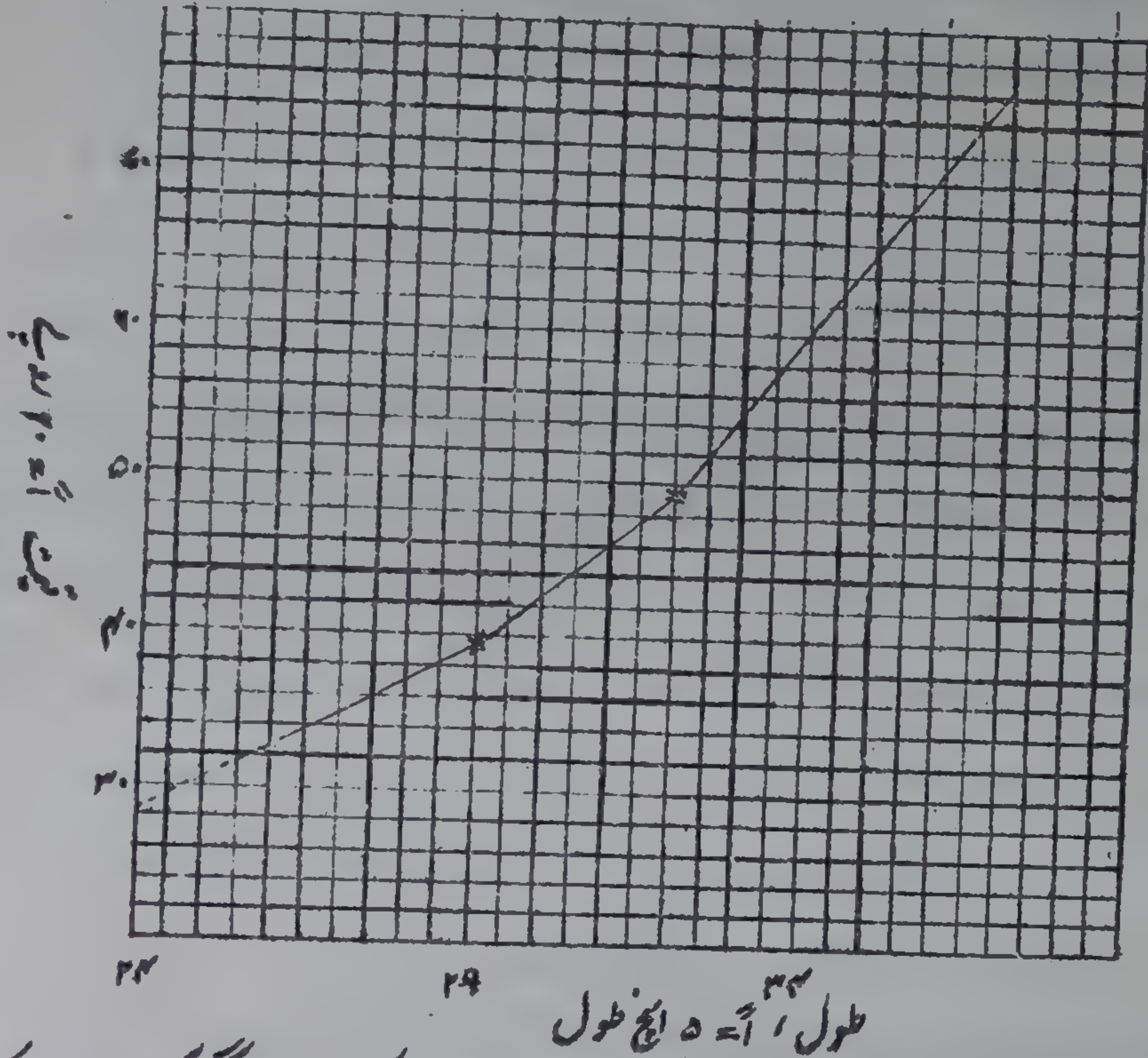
تحت میں اس سے پہلے آچکی ہیں، وہاں کسی چیز کی قیمت یکساں طور پر بدلتی تھی اس لئے اس کی ترسیم ایک مستقیم خط تھی، لیکن ضروری نہیں کہ کسی چیز کی مقدار اور اس کی قیمت میں سیدھا تناسب ہو یعنی قیمت یکساں طور پر بدلے کیونکہ ایسا ممکن ہے کہ کسی معیاری ناپ کی اشیا کی تیاری میں زیادہ سہولت ہو اور اس لئے لاگت کم لگے، برخلاف اس کے اس سے بڑے یا چھوٹے ناپ کی اشیا کے لئے خاص طور پر اہتمام کرنے کی وجہ سے یا کئی اور وجوہات کی بنا پر نسبتاً زیادہ صرفہ اٹھانا پڑے، پس ایسی صورتوں میں جب کسی چیز کے ناپ اور قیمت میں سیدھا تناسب نہ ہو تو قیمت اور ناپ کے مختلف جوڑوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے وہ اعداد و شمار کے نقاط کی طرح بے قاعدہ طور پر اوپر نیچے کہیں واقع ہوں گے، اگر کوئی مسلسل منحنی ان میں سے گزر سکے تو وہ قیمت کے تغیرات کو مناسب طریق پر تعبیر کرے گا، مگر ہندی کے لئے بہتر ہے کہ وہ ان نقاط کو بھی خطوط مستقیم کے ذریعہ ملائے۔

مشق ۱۔ ایک فہرست میں کپڑے رکھنے کے فولادی ٹرنکوں کی قیمتیں حسب ذیل ہیں۔

ٹرنک کا طول انچوں میں	۲۶	۲۹	۳۲	۳۵
قیمت روپوں میں	$۳۲ \frac{1}{۲}$	$۳۹ \frac{1}{۲}$	$۴۹ \frac{1}{۲}$	$۶۵ \frac{1}{۲}$

ان کو تریبی طریق پر تعبیر کرو اور ۲۴، ۲۸، ۳۰، ۳۶ انچ کے ٹرنکوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو، نیز معلوم کرو کہ ۵۵ روپے میں جو ٹرنک آئیگا اس کا طول کیا ہوگا۔

طولوں کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = $\frac{1}{4}$ انچ ٹرنک کا طول، فصلوں کو ۲ سے ناپنا شروع کرو۔
 قیمتوں کو انتصابی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ۲ روپے، معینوں کو ۲۰ سے ناپنا شروع کرو (۲۶، $\frac{1}{4}$ ۳۲)، (۲۹، $\frac{1}{4}$ ۳۹)..... کو مرسم کرو اور ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملاؤ۔



۲۴ انچ طول
 والے ٹرنک
 کی قیمت معلوم
 کرنے کے
 لئے پہلے خط
 کو پیچھے کی طرف
 نقطوں کے
 ذریعے خارج
 کرو حتیٰ کہ یہ
 انتصابی محور
 سے آئے۔

نیز ۳۶
 انچ طول والے ٹرنک کی قیمت معلوم کرنے کے لئے آخری خط کو ذرا آگے کی طرف خارج کرو
 شکل کو دیکھنے سے ۲۴ انچ طول والے ٹرنک کی قیمت تقریباً $\frac{1}{4}$ ۲۸ روپے ہے

۲۸	۳۰	۳۴	۳۶
۳۰	۳۳	۳۷	۳۹
۳۳	۳۷	۴۱	۴۳
۳۷	۴۱	۴۵	۴۷

اب ۵۵ روپے والے ٹرنک کا طول معلوم کرنے کے لئے محور ماہر کے اس
 نقطہ سے جو ۵۵ روپے کو تعبیر کرتا ہے افقی محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو
 مرسم سے ۵ پر ملے، د کا فصلہ طول مطلوبہ کو ظاہر کرے گا جو تقریباً $\frac{1}{4}$ ۳۶ انچ ہے۔

بعض تاجر مختلف ناپوں کی کسی چیز کو فروخت کے لئے موجود رکھنا چاہتے ہیں وہ پہلے مختلف ناپوں میں اس چیز کے تین چار نمونے تیار کرتے ہیں اور ان کی لاگت کا اندازہ کر لیتے ہیں، ان نمونوں کی بنا پر ایک ترسیم بنا کر وہ درمیان کے ناپوں کے لئے قیمتوں کی ایک وسیع فہرست شائع کر سکتے ہیں۔

بیمہ فائدہ اور سالانہ و غیرہ کے سوالات میں بھی ترسیمیں طریقوں کا استعمال ہو سکتا ہے۔ ہر شخص چاہتا ہے کہ اپنے ایام پیری کے لئے ایک معقول رقم جمع رکھنے کا کوئی پختہ انتظام کر سکے یا اپنی وفات کے بعد اپنے بیوی بچوں کے لئے کچھ سرمایہ چھوڑ جائے۔ آج کل کئی کمپنیاں اور بینک خاص شرائط پر اس قسم کا معاہدہ کرنے کے لئے تیار ہیں کہ اگر کسی خاص عمر کا کوئی شخص ایک مقررہ معمولی رقم یا قاعدہ طور پر سالانہ ادا کر لے کے لئے تیار ہو تو وہ کمپنی اس کے عوض میں ایک بہت بڑی رقم بوڑھے ہونے پر اس کو یکمشت ادا کرے گی یا اگر وہ اس سے پہلے کسی وقت فوت ہو جائے تو اس کی ہدایات کے بموجب اس کے پس ماندگان میں سے کسی ایک کو یہ رقم یکمشت دے دیگی۔ ایک خاص صورت میں فرض کرو کہ ۲۱ سال کی عمر کا ایک شخص یہ انتظام کرنا چاہتا ہے کہ اگر وہ ۵۵ سال کی عمر تک زندہ رہے تو اس کو ۲ ہزار روپیہ کی ایک رقم یکمشت مل جائے یا اگر وہ اس سے پہلے کسی وقت فوت ہو جائے تو بھی یہی رقم اس کے بیوی بچوں کو یکمشت ادا کی جائے، وہ ایک کمپنی کی طرف رجوع کرتا ہے جو اس کی عمر اور صحت کا تسلی بخش طریقہ پر طبی معائنہ کر کے ایک پالیسی جاری کرتی ہے جس کی رو سے وہ معاہدہ کرتی ہے کہ اگر وہ شخص تاحیات یا ۵۵ سال کی عمر تک ہر سال ایک قاعدہ طور پر ایک معمولی رقم مثلاً ۱۵ روپے ادا کرتا رہے گا تو وہ شرائط مذکورہ کے مطابق ۲ ہزار روپے ادا کرے گی۔

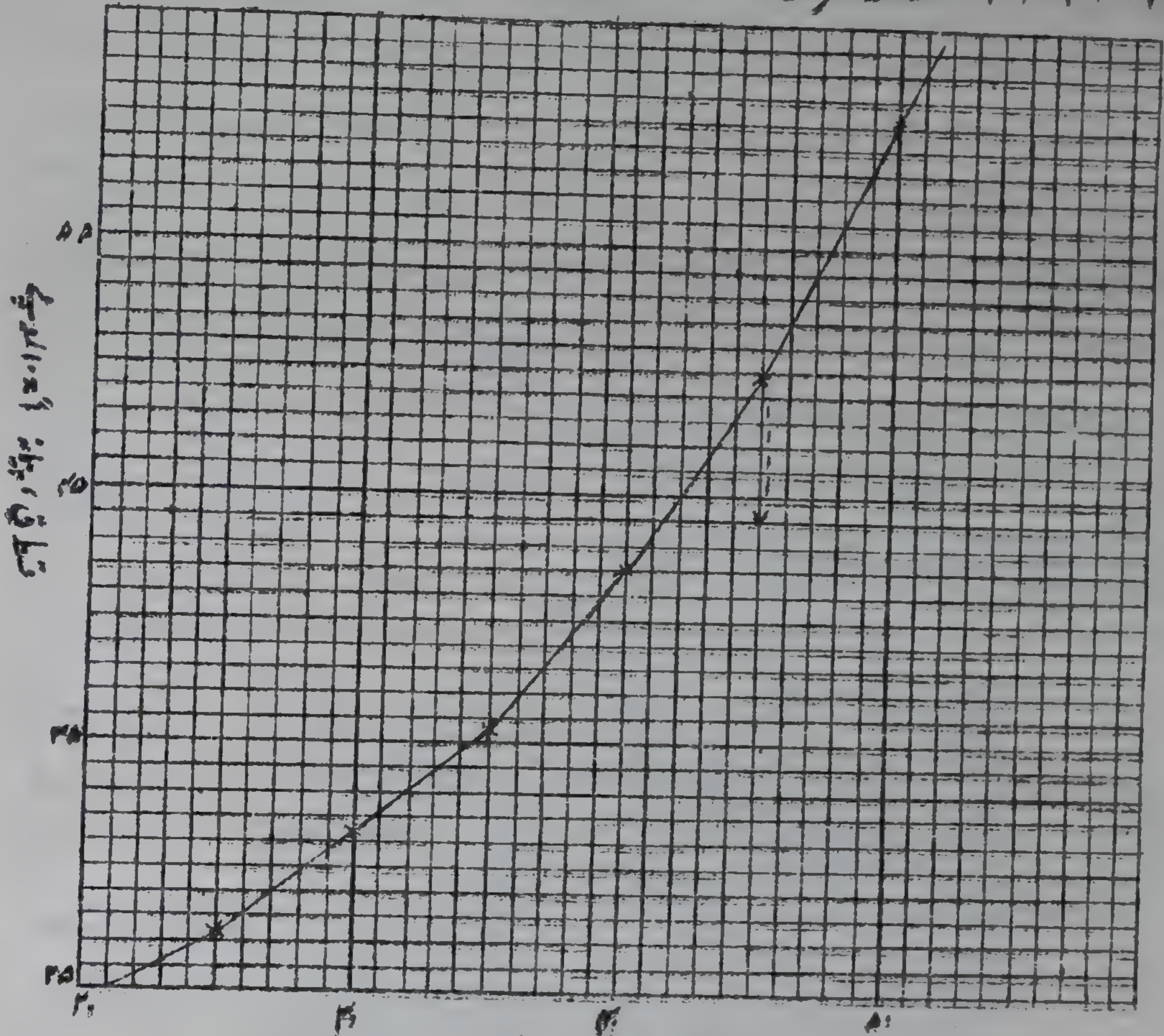
ظاہر ہے کہ سالانہ قسط کی مقدار اس شخص کی عمر کے لحاظ سے مقرر کی جائیگی، اگر اس کی عمر مقابلہ بڑی ہوگی تو دو ہزار روپیہ اس طرح محفوظ کرنے کے لئے اسے سالانہ ۱۵ روپے سے زیادہ ادا کرنا پڑے گا۔

مشق ۲۔ کسی خاص عمر پر ۱۵۰۰ روپے کے واسطے جان کا بیمہ کرانے

کے لئے سالانہ قسط کی قیمتیں روپوں میں حسب ذیل ہیں۔

ع	۲۱	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
ق	۲۵۶۲۰	۲۶۶۴۵	۳۱۶۲۰	۳۵۶۸۵	۴۲۶۰۰	۴۹۶۹۵	۵۰۶۴۵

۳۹، ۴۲، ۴۸ سال کی عمروں کے لئے سالانہ قسطوں کی مقدار میں معلوم کرو۔



عمر، چھوٹا آگے سال

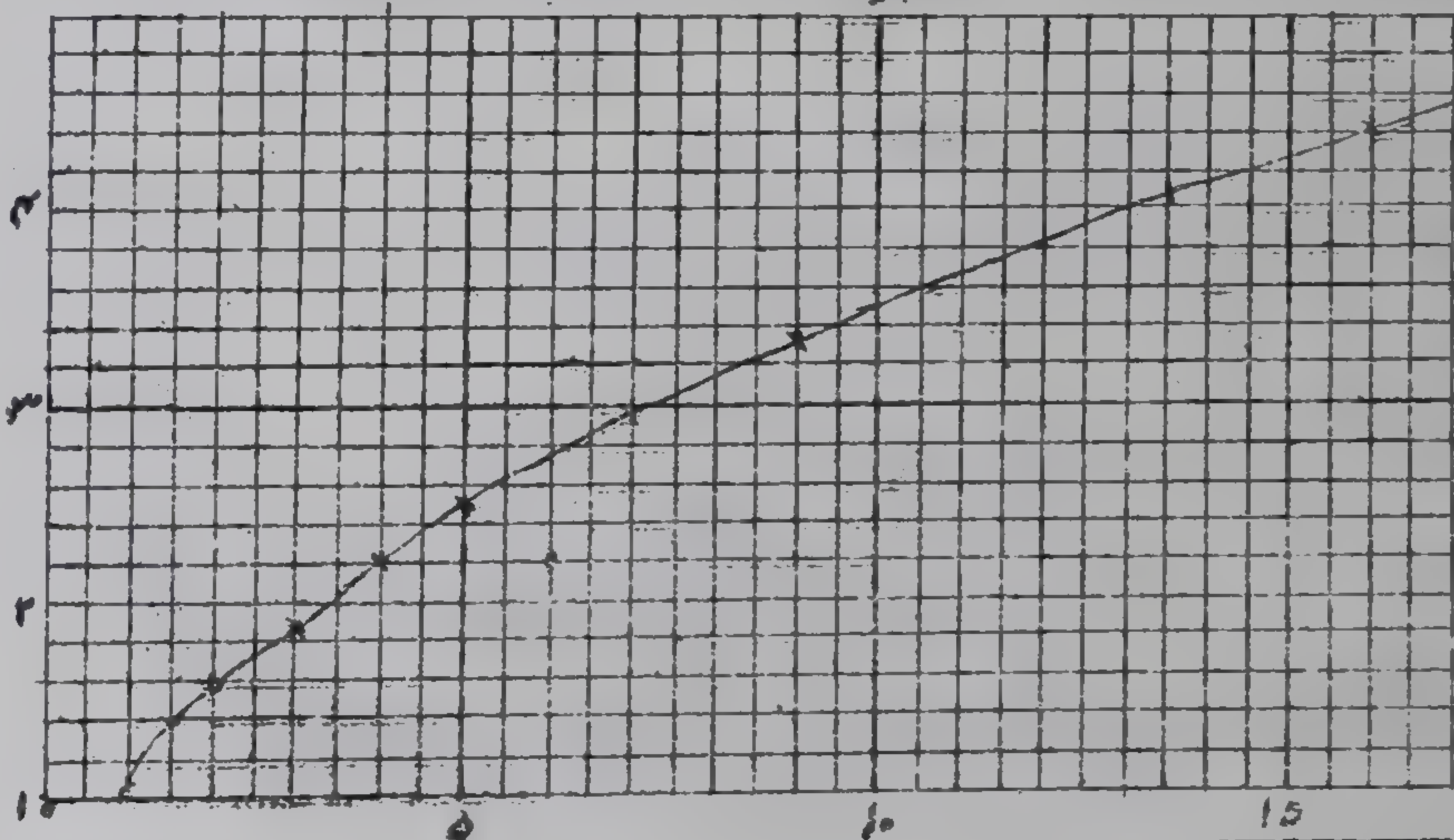
ع کو افقی محور پر نا پو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ایک سال، فاصلوں کو ۲۰ سے نا پنا شروع کرو نیز ق کو انتصابی محور پر نا پو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ایک روپیہ، معینوں کو ۲۵ سے نا پنا شروع کرو ان امور کے موافق جدول کے نقاط کو ساتھ کی شکل میں مرتب کر کے ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملا یا گیا ہے، طالب علم دیکھے کہ ان نقطوں میں

چھوٹا حصہ = ایک درجہ تپش، معینوں کو ۷ سے ناپنا شروع کرو۔
ان پیمانوں کے مطابق جدول بالائے کے نقاط ساتھ کی شکل میں مرتبہ کئے گئے ہیں اور ان کو حتیٰ الوسع صاف منحنی سے ملایا گیا ہے۔
اب ہم اوراج سے درمیان کے کسی خاص وقت پر درجہ تپش معلوم کر سکتے ہیں مثلاً $\frac{1}{10}$ بجے صبح تپش تقریباً $\frac{1}{9}$ ۷ درجہ تپش اور $\frac{1}{4}$ بجے تقریباً ۹ درجہ تپش نیز شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ تپش ۱۱ اور ۱۲ بجے کے درمیان زیادہ سرعت سے بڑھتی رہی، ۵ اور ۶ بجے کے درمیان بہت تھوڑی کم ہوئی، اور ۸ بجے کے درمیان بہت سرعت سے کم ہوئی زیادہ سے زیادہ تپش ایک بجے کے کچھ بعد ہوئی۔

اگرچہ تپش بعض اوقات بہت سرعت سے بڑھتی رہی ہے اور بعض اوقات آہستہ سے، تاہم یہ تبدیلی یک نخت واقع نہیں ہوتی بلکہ بتدریج ہوتی ہے اس لئے نقطوں کو خطوط مستقیم سے ملانے کی بجائے مسلسل صاف منحنی سے ملانا زیادہ مناسب ہے۔
مشق ۲۔ تجربہ سے ایک رقاص کا طول اور اس کی مدت ابتراز کی قیمتیں حسب ذیل معلوم کی گئی ہیں، ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

طول فٹوں میں	۱	۲	۳	۴	۵	۹	۱۶
وقت سیکنڈوں میں	۱۸۱	۱۶۶	۱۵۹	۱۶۲	۲۵۵	۳۵۳	۴۶۴

طول پیمانہ = ۵ فٹ



ترسیم سے معلوم
کرو کہ ۷، ۱۱ فٹ
لبے رقاصوں
کی مدت ابتراز
بالترتیب کیا
ہوگی، اگر
رقاص کی مدت

اہتراز ۲ سکند ہو تو اس کا طول کیا ہوگا،
طول کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ۱ = ۵ فٹ، وقت کو انتصابی محور پر اسے ناپنا شروع
کرو، پیمانہ ۱ = ۲ سکند نقاط (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۱، ۳) وغیرہ کو مرسم کرو اور ان کو
مسلل منحنی کے ذریعہ ملاؤ۔

شکل دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۷ فٹ لمبے رقا ص کی مدت اہتراز ۳ سکند
ہے اور ۱۱ فٹ لمبے کی ۷ و ۳ سکند نیز جس رقا ص کی مدت اہتراز ۲ سکند ہے
اس کا طول ۵ و ۳ فٹ ہے۔

امثلہ نمبری ۷

(۱) مشاف کے پہلے آٹھ ہفتوں میں سے ایک ہفتہ میں ایک تاجر نے جو نفع
اٹھایا وہ جدول ذیل میں ہے۔

پانی	آنہ	روپیہ		پانی	آنہ	روپیہ	
پہلا ہفتہ	۵	۸	۷۵	پانچواں ہفتہ	۱۱	۱۲	۹۰
دوسرا "	۳	۶	۶۰	چھٹا "	۸	۷	۷۵
تیسرا "	۷	۹	۴۵	ساتواں "	۰	۱۲	۹۰
چوتھا "	۰	۸	۴۶	آٹھواں "	۰	۳	۱۰۵

ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

(۲) ایک سکول کی کرکٹ ٹیم کے کپتان نے ۱۲ بازیوں (میچوں) میں حسب
ذیل دوڑیں (رتز) بنائیں۔

جنوری ۲۰	۷	فروری ۱۷	۱۵	مارچ ۱۷	۱۲
جنوری ۲۷	۱۰	فروری ۲۴	۲۱	مارچ ۲۴	۳
فروری ۳	۵	مارچ ۳	۰	مارچ ۳۰	۸
فروری ۱۰	۶	مارچ ۱۰	۲۵		

ایک شکل میں ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

(۳) ۱۱ ہفتے کی ایک میقات میں ایک لڑکا ہر ہفتہ اپنی جماعت میں جس جس

سال	۱۳۱۷	۱۳۱۸	۱۳۱۹	۱۳۲۰	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷
تعداد مدرس سرکاری	۹۳۰	۹۶۰	۱۰۳۴	۱۰۳۶	۱۰۵۲	۱۰۶۶	۱۰۹۴	۱۱۶۹	۱۲۵۴	۱۳۶۹	۱۴۲۴
ٹپہ خانہ جات	۳۰۶	۳۴۲	۳۷۳	۳۸۶	۴۱۳	۴۴۷	۴۷۲	۵۳۰	۵۵۱	۵۸۲	۶۱۷

ان کو ترقی طریق پر الگ الگ مرقسم کرو اور معلوم کرو کہ

(۱) سرکاری مدرسوں کی تعداد ۵ ہزار کب ہو جائے گی۔

(۲) ٹپہ خانہ جات تعداد میں ایک ہزار کب ہو جائیں گے۔

(۷) ۱۳۱۳ امرداد ۱۳۲۳ فصلی سے ۱۳۱۳ امرداد ۱۳۲۳ فصلی تک انجن ہائے اتحادی کی تعداد مع تعداد اراکین اور کل سرمایہ جدول ذیل میں مندرج ہے۔

سال	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷	۱۳۲۸	۱۳۲۹
انجنینیں	۲۵	۵۴	۲۹۵	۶۱۶	۹۸۹	۱۲۵۲
اراکین	۶۰۸	۱۷۶۷	۶۲۵۵	۱۵۱۹۳	۲۴۶۰۳۳	۳۰۹۱۲
سرمایہ	۱۷۸۱۵۶۸	۳۱۵۱۰۹۵	۱۱۰۰۶۵۷	۲۸۵۸۱۶۰	۴۸۶۳۵۴۶	۶۳۷۸۸۱۶

ان اعداد کو الگ الگ مرقسم کرو اور معلوم کرو کہ انجنینوں کی تعداد ۵۰۰ کب ہوگی اور کل سرمایہ ایک کروڑ کب ہو جائے گا۔

(۸) برٹش انڈیا میں اخراجات افواج سرکار انگریزی پونڈوں میں چند گزشتہ سالوں میں حسب ذیل ہوئے۔

۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸ (سوازنہ)	۱۹۱۹ (سوازنہ)
۱۹۵۵۸	۱۹۷۶۹	۲۰۳۶۴	۲۱۸۶۹	۲۴۲۶۶	۲۷۶۶۷	۲۷۷۶۹

ان کو ترقی طریق پر ظاہر کرو۔

(۹) برٹش انڈیا کی آمدنی کے محاصل پونڈوں میں ۱۹۱۳ء سے ۱۹۱۸ء تک مختلف

تدوں سے حسب ذیل ہے۔

سال	۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸
زمین	۲۱۳۵۹۲	۲۱۴۵۲۲	۲۲۰۵۳۱	۳۲۰۵۴۱	۲۱۶۵۱۱	۲۲۷۵۹۹
آبکاری	۸۸۵۹۲	۸۸۵۵۷	۸۶۵۳۲	۹۲۵۱۶	۱۰۰۵۷۷	۱۰۶۵۳۷
کرورگیری	۷۵۵۵۸	۶۳۵۳۷	۵۸۵۷۳	۸۶۵۵۹	۱۱۲۵۰۳	۱۰۸۵۱۳
آبپاشی	۴۷۵۱۳	۴۶۵۸۱	۴۷۵۷۹	۵۱۵۵۶	۵۱۵۷۵	۵۳۵۲۰

ترسیات

ان کو ترسیعی طریق پر ظاہر کرو۔
(۱۰) ۱۸۷۹ء اور ۱۸۸۵ء کے درمیان جو لوگ آئرلینڈ کے ملک سے غیر مالک میں چلے گئے ان کی تعداد ہزاروں میں حسب ذیل ہے۔

سال	۱۸۷۹	۱۸۷۸	۱۸۷۷	۱۸۷۶	۱۸۷۵	۱۸۷۴	۱۸۷۳	۱۸۷۲	۱۸۷۱	۱۸۷۰	۱۸۶۹
تعداد	۳۷۵۵	۳۸۵۵	۴۱۵۱	۴۷۵۰	۹۵۵۵	۷۸۵۴	۸۹۵۱	۱۰۸۵۷	۷۵۵۸	۶۳۵۰	۱۸۸۵

ان کو ترسیعی طریق پر تبصیر کرو۔
(۱۱) ہر چار مردم شماری ممالک محدود سرکار عالی میں مردوں عورتوں کی تعداد الگ الگ لاکھوں میں ۱۸۸۱ء سے ۱۹۱۱ء تک ذیل کے تحت میں دی گئی ہے۔

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
مرد	۵۰۵۰	۵۸۵۷	۵۶۵۷	۶۸۵۰
عورتیں	۴۸۵۳	۵۶۵۶	۵۴۵۷	۶۵۵۸

ان اعداد کو مرتب کر کے ترسیم کھینچو اور ذیل کے سوالات کے جواب لکھو۔

- (۱) ۱۸۹۵ میں مردوں کی تعداد کیا تھی ؟
 (۲) ۱۹۰۷ میں عورتوں کی تعداد کیا تھی ؟
 (۳) کونسا منحنی مقابلہ زیادہ اضافہ ظاہر کرتا ہے
 (۴) اگر اضافہ کی شرح یکساں فرض کی جائے تو مردوں کی تعداد ۹۰ لاکھ کب ہو جائے گی اور اُس سال عورتوں کی تعداد کیا ہوگی ۔
 (۱۲) انگلستان اور ویلز، اسکاٹ لینڈ، آئر لینڈ کی آبادیاں لاکھوں میں ۱۸۵۱ سے ۱۹۱۱ تک جدول ذیل میں درج ہیں ۔

سال	۱۸۵۱	۱۸۶۱	۱۸۷۱	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
انگلستان اور ویلز	۱۷۹۵۲۸	۲۰۰۵۶۶	۲۲۷۹۱۲	۲۵۹۵۷۴	۲۸۰۶۶۲	۳۲۵۵۲۷	۳۶۰۵۷۰
اسکاٹ لینڈ	۲۸۵۸۹	۳۰۵۶۲	۳۳۵۶۰	۳۶۵۳۶	۴۰۵۲۶	۴۴۵۷۲	۴۷۵۶۱
آئر لینڈ	۶۵۵۵۲	۵۷۵۷۹	۵۴۵۱۲	۵۱۵۷۵	۴۷۵۰۵	۴۴۵۵۹	۴۳۵۹۰

ان نتائج کو ترسیعی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ

- (۱) ان سالک کی آبادیاں ۱۸۵۷، ۱۸۸۹ اور ۱۹۰۷ میں کیا تھیں
 (۲) اسکاٹ لینڈ اور آئر لینڈ کی آبادیاں کب مساوی ہوں گی۔
 (۳) اگر آبادی کی کمائی بیشی کی شرح مستقل ہو تو معلوم کرو کہ انگلستان میں آبادی ۴۰۰ لاکھ کب ہو جائے گی نیز اسکاٹ لینڈ کی آبادی آئر لینڈ کی آبادی سے ڈیوڑھی اور دو چند کب ہوگی ۔
 (۱۳) ایک دوکاندار کسی چیز کے مختلف ناپوں کے لئے قیمت کی ایک فہرست بنانا چاہتا ہے، اس نے اس چیز کے ۶ ناپ تیار کرانے سے ان کی لاگتیں حسب ذیل معلوم کیں۔

امبائی پیمائشیں	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۱	۳۵	۴۰
قیمت	۱۸	۲۴	۲۸-۸	۳۱-۱۲	۳۴-۲	۳۶-۴	۳۸

اس کی ترسیم بناؤ اور اس سے معلوم کرو کہ ۱۲، ۲۱، ۳۰، ۴۵ انچ لمبی اشیاء کی تقریبی قیمتیں کیا ہوں گی، اور ۳۲ روپے کو جو چیز آئے گی اس کی لمبائی کیا ہو گی۔

(۱۴) ایک فہرست میں ایلو مینم کی دیگیچوں کے ناپ اور ان کی قیمتیں حسب ذیل مندرج ہیں:-

ناپ	۲ پائٹ	۳ پائٹ	۴ پائٹ	۶ پائٹ	۸ پائٹ
قیمت	۴ روپیہ ۱۵	۶ روپیہ ۱۵	۸ روپیہ ۳۴	۱۰ روپیہ ۵۵	۱۴ روپیہ ۱۴

ترسیم بنا کر دیکھو کہ ۵، ۷، ۹ پائٹ کی دیگیچوں کی قیمتیں کیا ہوں گی اور ۵ روپے، ۷ روپے، ۱۲ روپے، ۱۲ روپے کو کتنے پائٹ کی دیگیچیاں آئیں گی۔

(۱۵) قیمتوں کی ایک فہرست میں دستی بیگوں کے ناپ اور ان کی قیمتیں حسب ذیل مندرج ہیں۔

ناپ	۱۲	۱۸	۲۰	۲۴	۲۷	۳۰
قیمت	۲۹ روپیہ ۸	۳۵ روپیہ ۸	۳۹ روپیہ ۸	۵۵ روپیہ ۸	۵۹ روپیہ ۱۲	۶۳ روپیہ ۱۲

ترسیم بنانے سے معلوم کرو کہ ۱۵، ۱۶، ۲۲، ۲۶ انچ کے بیگ کی کیا قیمت ہو گی اور ۳۰ روپے، ۱۲ روپے، ۵۰ روپے میں کتنی لمبائی کے بیگ آئیں گے۔

(۱۶) اسپر قوت قی والے ایک اکجن میں ایندھن کا ہفتہ وار صرفہ حسب ذیل کی فہرست میں مندرج ہے۔

قی	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰	۶۰	۸۰
ص	۳ روپیہ ۲	۷ روپیہ ۱۲	۱۳	۲۵	۳۲	۴۸

بتاؤ کہ ۱۴۵، ۱۶۵، ۷۰، ۹۰ ایسی قوت والے انجنوں کا صرفہ تقریباً کیا ہوگا۔
(۱۷) ۱۰۰ پونڈ کی یکمشت رقم کے لئے جان کا بیمہ کرائے کے واسطے مختلف عمروں میں حسب ذیل چندہ دینا پڑتا ہے۔

عمر	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
پونڈ	۲۵۱	۲۶۳۵	۲۶۸	۳۶۳	۴۶۲۵	۵۶۶	۶۶۷

ان کو ترسیعی طریق پر تعمیر کرو اور ۲۷، ۴۸، ۵۲ سال کی عمروں کے لئے چندہ کی مقدار معلوم کرو۔
(۱۸) ۷۰ برس کی عمر کے ایک مرد کی جتنے سال اور زندہ رہنے کی امید کی جاسکتی ہے وہ دئی کر المانک میں حسب ذیل دی گئی ہے۔

عمر	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
امید حیات	۴۱۶۳۵	۵۱۶۰۱	۴۹۶۱۰	۴۵۶۹۶	۴۲۶۵۸	۳۹۶۴۰	۳۶۶۴۱	۳۳۶۵۲	۳۰۶۷۱	۲۷۶۹۶

بتاؤ کہ ۱۷، ۱۴، ۱۱، ۲۱، ۳۵ سال کے مردوں کے لئے امید حیات کتنے سال ہو سکتی ہے۔
(۱۹) لا، ما کی تناظر قیمتیں ذیل کی جدول میں درج ہیں، ان کے باہمی تعلق کو ظاہر کرنے والا منحنی بناؤ۔

لا	۰	۱	۱۶۵	۲	۲۶۵	۳	۳۶۵	۴	۴۶۵	۰
ما	۰	۱	۲۶۶۵	۴	۶۶۶۵	۹	۱۲۶۶۵	۱۶	۲۰۶۵۵	۰

ترسیم کو دیکھنے سے بتاؤ کہ لا کی قیمت ۴۶۵ کے تناظر ما کی کیا قیمت ہوگی۔
(۲۰) ایک تجربہ کی بنا پر دو مقادیر لا، ما کی جو قیمتیں معلوم کی گئی ہیں وہ جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

لا	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۵	۳۳	۳۲۹	۳۲۵	۳۲	۶۱۷

ترسیم کو دیکھنے سے بتاؤ کہ لا کی قیمت ۱۸ و کے جواب میں ما کی کیا قیمت ہوگی اور ما کی قیمت ۱۶ و کے جواب میں لا کی کیا قیمت ہوگی۔
 (۲۱) ایک جسم جاذبہ ارض کے زیر عمل کسی خاص مقام سے گرنا شروع کرتا ہے اس کا فاصلہ طے کردہ ف اور متناظر وقت ت کی قیمتیں جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

ت سکند	۵	۱	۲	۳	۴	۵
ف	۴	۱۶	۳۶	۶۴	۱۰۰	۱۴۴

ف اور ت کا تعلق ترسیمی طریق پر ظاہر کرو اور (۱) ایک ایسے پہاڑ کی بلندی معلوم کرو کہ جس کی چوٹی سے اگر ایک پتھر پھینکا جائے تو وہ ۲ و ۳ سکند میں سطح زمین پر آکر گرے، ایک ایسے گڑھے کی گہرائی معلوم کرو جس کی یہ تک پہنچنے کے لئے ایک پتھر کو ۳ و ۲ سکند لگیں۔
 (۲۲) ذیل کی جدول کی بنا پر بار پہاڑ کے ارتفاع کے تغیرات کو ظاہر کرنے کے لئے سلسل اور صاف منحنی کھینچو۔

وقت	۲ بجے صبح	۶ بجے صبح	۸ بجے صبح	۱۲ بجے دوپہر	۳ بجے شام	۶ بجے شام	۹ بجے شام	۱۲ بجے رات
ارتفاع	۲۹۱۷۵	۲۹۶۸	۳۰	۲۹۶۹۵	۲۹۶۹۰	۲۹۶۹۳	۲۹۶۹۷	۲۹۶۹۳

ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ ۹ بجے صبح ایک سبکے دوپہر، اور پانچ بجے شام کو بار پہاڑ کا ارتفاع تقریباً کیا ہوگا۔

(۲۳) ایک ستوانہ کے اندر پانی ڈالا گیا ہے، اس کی پیش کو بالترتیب بدل کر ہر درجہ

تیش کے تناظر پانی کا حجم دریافت کیا گیا ہے۔ حجم اور تیش کی یہ تناظر قیمتیں ذیل کی جدول سے ظاہر ہیں۔ ان کو مرتب کر کے بتاؤ کہ پانی کا حجم تقریباً ۴۰ سنتی گریڈ پر کم سے کم ہے۔

تیش سنتی گریڈ پر پانی	۱	۲	۳	۵	۸۵۵	۱۰	۱۲	۱۳
حجم مکعب انچوں میں	۱۰	۶	۵۵۷	۵۵۲	۹	۱۲	۱۴	۱۸

ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ ۴۰ سنتی گریڈ پر حجم کیا ہوگا اور جب حجم ۲۰ مکعب انچ ہوگا تو تیش کیا ہوگی؟
(۲۴) ایک گلاس کو ۱۵۰ سنتی گریڈ تیش والے پانی سے بھر کر بتدریج گرم کیا گیا ہے اور لختا سکندوں کے بعد اس کی تیش کی قیمتیں جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

ت	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵
تیش	۱۵	۲۰۶۵	۲۴۵۷	۲۸۶۲	۳۲	۳۵۶۱۵	۳۸۵۲۵	۴۱۵۱

وقت اور تیش کا منحنی کھینچو۔
(۲۵) ایک تجربہ سے کسی گیس پر کے دباؤ اور اس کے تناظر حجم کی قیمتیں جبکہ تیش مستقل رہے ذیل کی جدول میں دی گئی ہیں

دباؤ پونڈوں میں	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب انچوں میں	۳	۲	۱۵۳۳	۱	۵۸	۵۶۶

اس کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو اور ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ جب دباؤ بالترتیب $\frac{1}{2}$ پونڈ، $\frac{1}{4}$ پونڈ ہوگا تو حجم کیا ہوگا اور کس دباؤ پر حجم ۵۵۱ ہوگا۔



باب چہارم

مساوات درجہ دوم

۳۱۔ دفعہ ۱۱ میں ہم نے دیکھا کہ مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت مساوات کے درجہ کا تعین کرتی ہے، نیز کسی ایک مساوات میں مجہول مقداروں کی تعداد ایک، دو، تین یا زیادہ ہو سکتی ہے مثلاً

$۲ + ۳ = ۰$ ایک مجہول (مقدار) کی مساوات درجہ اول ہے،

$۲ + ۳ + ۴ = ۰$ دو مجہولوں کی مساوات درجہ اول ہے،

اسی طرح سے $۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۰$ ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم ہے وغیرہ وغیرہ

دیکھو نقشہ ذیل، اس میں ہر عددی مساوات کے ساتھ اس کی عام سے عام صورت بھی لکھ دی گئی ہے

مسادات

درجه اول

درجه دوم

درجه سوم

یک مجبور اولی

$۲ \text{ لا}^۲ + ۳ \text{ لا} + ۳ \text{ م} - ۵ = ۰$
 $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} + ۱ \text{ ج} + ۸ \text{ د} = ۰$

دو مجبور اولی

$۲ \text{ لا}^۲ + ۳ \text{ لا} + ۱ \text{ م} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ م} + ۷ = ۰$
 $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ط} + ۱ \text{ لا} + ۱ \text{ ب} + ۱ \text{ م} + ۲ \text{ گ} + ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ف} + ۱ \text{ ج} = ۰$

یک مجبور اولی مقدار

$۲ \text{ لا} + ۳ \text{ م} + ۱ \text{ لا} + ۳ = ۰$
 $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} + ۱ \text{ ج} = ۰$

یک مجبور اولی مقدار

$۲ \text{ لا} + ۳ \text{ م} = ۰$
 $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} = ۰$

تین مجبور اولی

$۲ \text{ لا} + ۳ \text{ م} + ۱ \text{ م} + ۵ = ۰$
 $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} + ۱ \text{ ج} + ۱ \text{ ی} + ۲ \text{ د} = ۰$

دو مجبور اولی

$۲ \text{ لا} + ۳ \text{ م} + ۱ \text{ م} = ۰$
 $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} + ۱ \text{ ج} = ۰$

نیز ہم جانتے ہیں کہ کسی مساوات کے حل یا اصل سے کیا مراد ہے ،
معلوم مقداروں کی رقوم میں مجہول مقداروں کی وہ قیمت جو مساوات کو پورا کرے
مساوات کا حل یا اصل کہلاتی ہے ، تفصیل کے لئے دیکھو دفعہ ۱۱۔

۳۲۔ مساوات درجہ دوم

جس مساوات میں مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت دو ہو اسے مساوات
درجہ دوم کہتے ہیں مثلاً

$$۲ \text{ لا}^۲ + ۳ = ۰$$

$$۳ \text{ لا}^۲ + ۵ \text{ لا} = ۰$$

$$۲ \text{ لا}^۲ + ۵ \text{ لا} - ۱۳ = ۰$$

$$۱۲ = ۱۱ \text{ لا} - ۶ \text{ لا}^۲$$

$$(۳ - ۲ \text{ لا}) = ۵ (۱ + \text{لا})$$

وغیرہ وغیرہ

$$۳ (۲ + ۲ \text{ لا}) = (۶ - ۲ \text{ لا})$$

اوپر کی ہر ایک مساوات میں صرف ایک مجہول مقدار شامل ہوتی ہے اور
اس کی بڑی سے بڑی قوت دو ہے ، دراصل اس کا پورا نام ایک
مجہول کی مساوات درجہ دوم ہونا چاہیے لیکن اختصاراً اسے

مساوات درجہ دوم کہتے ہیں۔

طالب علم جانتا ہے کہ $۱ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} + ۱ = ۰$ میں معلوم مقدار
 ۱ ، ۲ ، ۱ کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے اوپر کی ہر ایک مساوات اور
نیز درجہ دوم کی کوئی عددی مساوات حاصل ہو سکتی ہے ، پس مساوات
درجہ دوم کی عام سے عام صورت

$$۱ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} + ۱ = ۰$$

۳۳۔ ذیل کا مسئلہ ضروری ہے۔

اگر کوئی حاصل ضرب صفر ہو تو اس حاصل ضرب کا ایک جزو ضربی لازماً صفر ہوگا۔
فرض کرو کہ حاصل ضرب لا = ۰، تب اگر ما صفر کے مساوی نہ ہو تو
تقسیم کی تعریف کے مطابق

$$لا = ۰ = ۰ \div ۰ \text{ یعنی ایک جزو ضربی } لا = ۰$$

اسی طرح فرض کرو کہ حاصل ضرب لا ما ی = ۰، تو اگر لا اور ما ی سے
کوئی بھی صفر کے مساوی نہ ہو تو ی = ۰ = ۰ \div لا پس ایک جزو ضربی ی صفر
کے مساوی ہے۔

اسی طرح یہ مسئلہ اجزائے ضربی کی کسی تعداد کے لئے ثابت کیا جاسکتا ہے
امثلہ۔ اگر لا (۳ + لا) = ۰ تو ظاہر ہے کہ یا تو لا = ۰ یا لا + ۳ = ۰ پس جملہ لا (۳ + لا)
کے صفر کے مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ لا = ۰ یا لا = ۳
اسی طرح ہم مساوات لا = ۳ کو حل کر سکتے ہیں۔
طرفین سے ۳ منفی کرنے سے

$$لا - ۳ = ۰ \text{ یعنی } (لا + ۳) - ۳ = ۰$$

$$\text{پس یا تو } لا + ۳ = ۰ \text{ جس سے } لا = -۳$$

$$\text{یا } لا - ۳ = ۰ \text{ " } لا = ۳$$

۳۳۔ مساوات درجہ دوم کا حل اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے
مساوات درجہ دوم میں مجہول مقدار کی قوت دو سے زیادہ نہیں
ہونی چاہیئے، لیکن دو سے کم سب قوتیں اس مساوات میں واقع ہو سکتی
ہیں مثلاً مساوات لا + لا - ۱۵ = ۰ میں لا کی دوسری قوت کے علاوہ
لا کی پہلی قوت اور صفر قوت بھی واقع ہوتی ہے، ایسی مساوات درجہ دوم
کو مخلوط مساوات کہتے ہیں۔ لیکن جس مساوات میں مجہول مقدار کا صرف
مربع شامل ہو اور پہلی قوت شریک نہ ہو اسے خالص مساوات درجہ دوم
کہتے ہیں۔ جیسے لا - ۹ = ۰ اور لا + ۹ = ۰

درجہ دوم کی خالص مساواتیں اجزائے ضربی میں تحلیل ہونے سے

آسانی حل ہو سکتی ہیں۔

مساوات ۷ لا^۲ = ۶۳ کو حل کرو۔

طرفین مساوات کو ۷ پر تقسیم کرنے سے لا^۲ = ۹

طرفین سے ۹ تفریق کرنے سے لا^۲ - ۹ = ۰

یعنی (لا - ۳)(لا + ۳) = ۰

اس حاصل ضرب کے صفر ہونے کے لئے ضروری ہے کہ اس کا کوئی

ایک جزو ضربی صفر ہو پس لا - ۳ = ۰ جس سے لا = ۳

یا لا + ۳ = ۰ جس سے لا = -۳

پس مساوات ۷ لا^۲ = ۶۳ کے دو حل ۳ + اور -۳ ہیں۔

تصدیق۔ جب لا = ۳ + تو لا^۲ = (۳ +)² = ۶۳

پس لا کی قیمت ۳ کے لئے طرفین مساوات برابر ہو جاتے ہیں۔

اس لئے ۳ مساوات کا حل ہے، اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ -۳

بھی مساوات کا حل ہے۔

مساوات ۳ (لا + ۱) - ۵ = ۲ (لا + ۷) کو حل کرو

۳ لا^۲ - ۲ = ۲ لا + ۱۴

یعنی لا^۲ = ۱۶

طرفین سے ۱۶ تفریق کرنے سے

لا^۲ - ۱۶ = ۰ یعنی (لا - ۴)(لا + ۴) = ۰

جس سے لا = ۴ یا -۴

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ۴ اور -۴ مساوات کے حل ہیں۔

مساوات کی شکل لا^۲ = ۱۶ سے ظاہر ہے کہ لا ایک ایسی مقدار ہے

جس کا مربع ۱۶ ہے، اس لئے لا کو ۴ یا -۴ کے مساوی ہونا چاہیے۔

۳۵۔ درجہ دوم کی مخلوط مساواتوں کو جب معیاری صورت میں لایا جائے

تو مساوات کے دائیں جانب ایک جملہ درجہ دوم ہوگا اور بائیں طرف صفر، جب یہ دائیں طرف کا رکن دوا جزائے ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکے تو مساوات باسانی حل ہو سکتی ہے۔

درجہ دوم کی مساواتوں کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں اور ان میں سے چند ذیل کی مثالوں میں دئے جائیں گے مگر کوئی اور طریقہ استعمال کرنے سے پہلے طالب علم کو چاہیے کہ مساوات کو معیاری صورت میں لانے کے بعد دائیں طرف کے جملہ درجہ دوم کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرے، اگر وہ اس میں کامیاب ہو گیا تو وہ مساوات کو حل کر سکے گا۔

(۱) مساوات لا - ۸ = ۱۵ + پر غور کرو۔

یہ اس طرح لکھی جاتی ہے (لا - ۳) (۳ - ۵) = ۰

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا = ۳ تو دایاں پہلو = (۳ - ۳) (۳ - ۵) = ۰ × ۲ = ۰ پس لا کی قیمت ۳ مساوات کو پورا کرتی ہے یعنی ۳ مساوات کی اصل ہے۔ نیز جب لا = ۵ تو مساوات کا دایاں پہلو = (۵ - ۳) (۵ - ۵) = ۰ × ۰ = ۰ اس لئے ۵ بھی مساوات کی اصل ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ہر مساوات درجہ دوم کی دو اور صرف دو اصلیں ہوتی ہیں۔

نوٹ - ہم نے پہلے دیکھا ہے کہ صفر کا ہر محدود ضعف صفر ہوتا ہے، ۰ × ۰ = ۰

۰ × ۱ = ۰، ۰ × ۲ = ۰، ۰ × ۳ = ۰، ۰ × ۴ = ۰، ۰ × ۵ = ۰، ۰ × ۶ = ۰، ۰ × ۷ = ۰، ۰ × ۸ = ۰، ۰ × ۹ = ۰، ۰ × ۱۰ = ۰

(۲) مساوات لا - ۴۰ = ۳ لا کو حل کرو۔

تمام رقموں کو دائیں جانب لانے اور طرفین کو ۳ پر تقسیم کرنے سے

لا + لا = ۲۰

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے

(لا + ۵) (۵ - لا) = ۰

جس سے ظاہر ہے کہ - ۵ اور ۵ مساوات کی اصلیں ہیں۔
تصدیق - اگر لا = ۵

$$\text{تو دایاں رکن} = 3 \times (5 - 2) = 5$$

$$\text{اور بایاں رکن} = 5 - 3 \times 2 = 5$$

اس لئے ۵ مساوات کی ایک اصل ہے۔

$$\text{اسی طرح اگر } 4 = 3 + 1 \text{ تو مساوات کا دایاں رکن} = 3 \times (4 - 2) = 6$$

$$\text{اور بایاں رکن} = 6 - 3 \times 2 = 0$$

اس لئے ۳ مساوات کی ایک اصل ہے۔

$$(3) \text{ مساوات } 4 - 3 = 1 \text{ پر غور کرو۔}$$

اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $(4 - 3)(3 + 2) = 0$

اس حاصل ضرب کے صفر ہونے کے لئے ضروری ہے کہ

$$\text{ایک جزو ضربی صفر ہو پس اگر } 2 - 3 = 0 \text{ تو } 4 - 3 = 0$$

اور مساوات میں اس کو مندرج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات پوری

$$\text{ہوتی ہے کیونکہ } 4 - 3 = 1 \text{ اور } 3 - 2 = 1 \text{ تو } 1 \times 1 = 1 \text{ اور } 1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 1 - 1 = 0$$

اگر $3 - 4 = 0$ تو $4 - 3 = 0$ جس سے مساوات پوری ہوتی ہے

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں $4 - 3 = 0$ اور $3 - 4 = 0$ ہیں۔

$$(4) \text{ } 9 - 4 = 5 \text{ اور } 4 - 9 = -5$$

$$\text{مساوات مفروضہ سے } 9 - 4 = 5 \text{ اور } 4 - 9 = -5$$

$$\text{یعنی } (4 - 9) = -5$$

اس مساوات کے دائیں جانب جزو ضربی $4 - 9 = -5$ دو دفعہ

واقع ہوتا ہے اور اس مساوات درجہ دوم سے ہمیں $4 - 9 = -5$ کی صرف ایک قیمت

حاصل ہوتی ہے یہاں جو مساوات کو پورا کرتی ہے

ایسی صورت میں ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات کی دو اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

۴۔ مساوات کو حل کرنے سے پیشتر یہ ضروری ہے کہ اسے معیاری صورت میں لایا جائے اور اگر اس میں خطوط وحدانی یا کسریں واقع ہوں تو مساوات کو ان سے صاف کر لیا جائے۔

$$(۱) \quad ۴ - ۳ لا^۲ = \frac{۱۳}{۵} لا \quad \text{کو حل کرو}$$

طرفین کو ۵ سے ضرب دینے اور تمام رقموں کو دائیں جانب لانے سے

$$۲۰ - ۱۵ لا^۲ + ۱۳ لا = ۰$$

جملہ رقم کی علامات بدلنے سے [یعنی طرفین کو -۱ کے ساتھ ضرب دینے سے]

$$۱۵ لا^۲ - ۱۳ لا - ۲۰ = ۰$$

$$\text{یعنی} \quad (۵ لا + ۴)(۳ لا - ۵) = ۰$$

جس سے لا = $\frac{۵}{۳}$ یا $\frac{۴}{۵}$ جو مساوات کی اصلیں ہیں طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

$$(۲) \quad \text{مساوات} \quad لا + \frac{۱}{لا + ۱} - \frac{۲}{لا + ۲} + \frac{۶}{لا + ۳} = ۰ \quad \text{کو حل کرو}$$

نسب نماؤں کے ذواضعات اقل (لا + ۱)(لا + ۲)(لا + ۳) سے

ضرب دینے سے

$$لا(لا + ۲)(لا + ۳) + (لا + ۳)۲ - (لا + ۱)۲ + ۶(لا + ۱)(لا + ۲) = ۰$$

$$\text{یعنی} \quad لا^۳ + ۵ لا^۲ + ۶ لا - (لا^۳ + ۴ لا^۲ + ۳ لا - ۱) + ۶(لا^۲ + ۳ لا + ۲) = ۰$$

$$\text{یعنی} \quad ۳ لا^۲ + ۵ لا = ۰$$

$$\text{اس لئے} \quad لا = ۰ \quad \text{یا} \quad -\frac{۵}{۳}$$

امثلہ نمبری ۸

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں لکھو

$$۲ = (۲ + لا)(۱ - لا)$$

$$۱ - (۱ - لا)(۲ - لا) = ۰$$

$$۳ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۶ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۸ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۰ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۲ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

بتاؤ کہ ل کی کن قیمتوں کے لئے ذیل کے جملے صفر کے مساوی ہیں۔

$$۱۳ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۴ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۸ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو اور ہر صورت میں اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

$$۲۰ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۲ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۴ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۶ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں معلوم کرو۔

$$۲۸ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۳۰ - (۵ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$\frac{1}{۳۵} = \frac{1}{۱+ل} - \frac{1}{۱-ل}$$

$$۳ = \frac{۳}{۱+ل} + \frac{۱+ل}{۳}$$

$$۵ = \frac{۵}{۲+ل} + (۳-ل) ۲$$

$$\frac{۱۶}{۱۲-ل} = \frac{۲۶}{۹-ل} + \frac{۷}{۳+ل}$$

$$۳ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۵ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۷ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۹ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۱ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۳ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۵ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۷ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۱۹ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۱ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۳ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۵ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۷ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$۲۹ - (۳ + ل) (۲ + ل) = ۰$$

$$\frac{1}{۳۱} = \frac{۱۵}{۱+ل} - \frac{۱۵}{۱-ل}$$

$$۳ = \frac{۸-ل}{۵+ل}$$

$$\frac{۱۱}{۶} = \frac{۱۰}{ل} - \frac{۱۰+ل}{۵-ل}$$

$$\frac{۱۲}{ل} = \frac{۵-ل}{۴-ل}$$

۳۴۔ مساوات $لا^۲ + ۱۲ لا = ۰$ پر غور کرو۔

اس میں $لا^۲$ کا سر ایک ہے اور $لا$ کا سر ۱۲ ہے، اگر طرفین پر ۱ یعنی $لا$ کے نصف سر کا مربع زیادہ کر دیا جائے تو

$$لا^۲ + ۱۲ لا + ۳۶ = ۳۶$$

$$لا^۲ = ۳۶ - ۱۲ لا$$

ہم دیکھتے ہیں کہ طرفین مساوات پر ۱ زیادہ کرنے سے دائیں جانب کا رکن مربع کا حل بن جاتا ہے۔

مساوات $لا^۲ - ۸ لا = ۰$ کو، طرفین پر $لا$ کے نصف سر کا مربع $(۴-)$ زیادہ کرنے سے

$$لا^۲ - ۸ لا + ۱۶ = ۱۶$$

$$لا^۲ - ۸ لا = -۱۶$$

دائیں طرف کا رکن مربع کا حل بن جاتا ہے۔

طالب علم دیکھے کہ اس مساوات میں بھی $لا^۲$ کا سر ایک تھا۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ

جملہ $لا^۲ + ۶ لا$ بن جاتا ہے $(لا + ۳)$ طرفین پر ۳ یعنی ۹ زیادہ کرنے سے (۱)

اور $لا^۲ - ۱۰ لا$ " " " " $(لا - ۵)$ پر ۵ یعنی ۲۵ " " (۲)

$لا^۲ - ۲ ج لا$ " " " " $(لا - ج)$ پر $ج$ " " " (۳)

پس بالعموم $لا^۲ \pm ۲ ن لا$ کی شکل کا کوئی جملہ جس میں $لا^۲$ کا سر ایک ہو مربع کا حل بن جاتا ہے اگر $لا$ کے نصف سر کے مربع کو طرفین پر زیادہ کر دیا جائے

اب ہم اس امر کو درجہ دوم کی مساواتوں کے حل کرنے میں استعمال کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $لا^۲ = ۳۲ - ۱۴ لا$ کو حل کرو

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $لا^۲ + ۱۴ لا = ۳۲$

اس میں لا کا سر ایک ہے، پس لا کے نصف سر کے مربع کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$P\left(\frac{1}{r}\right) + rr = P\left(\frac{1}{r}\right) + u_1 r + u$$

يعني $1 = 1^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2$

يعني $2q = 2(4 + 1)$

طرفین کا جذر لینے سے $9 \pm \sqrt{9} = 9 \pm 3$ (1)

اگر مثبت علامت لی جائے تو $9 = 4 + 5$ یعنی $5 = 9 - 4$

اگر منفی علامت لی جائے تو لا $\pm 4 - 9$ یعنی لا $= -16$

نوٹ۔ بادی النظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) سہنی جا رہی ہے

$$q \pm' = (4 + 0) \pm$$

یہ غیر ضروری ہے جیسا کہ ہم چاروں صورتوں کو الگ الگ لیکر دیکھ سکتے ہیں۔

دو نون طرف مثبت علامت لینے سے $9 = 4 + 5$ یعنی $2 = 1$ ایک ہی جواب

منفی

دائیں طرف مثبت اور بائیں طرف منفی علامت لینے سے

لا + 4 = 9 یعنی لا = 14

دائیں طرف منفی اور بائیں طرف مثبت علامت لینے سے

لا - = 4 + 9 يعني لا - = 14

دونوں صورتوں میں جواب ایک ہی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ دوہری علامت (\pm) صرف ایک طرف لگانا کافی ہے اور بالعموم اسے عددی جذر کے ساتھ لگاتے ہیں۔

مثال ۲۔ $لا^2 + (۰.۹) لا = ۱۲$ کو طرفین پر زیادہ کرنے سے
 $لا$ کے نصف سر کے مربع (۰.۳۵) کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$V(s, r, \theta) + 1512 = V(s, r, \theta) + U(0.59) + V_U$$

$$62.25 + 1512 =$$

$$153225 = 2(545 + \lambda)$$

حسابی طریق سے 153225 کا جذر 1515 حاصل ہوتا ہے

$$\text{پس } \lambda + 545 = \pm 1515$$

$$\text{اس لئے } \lambda = 970 \text{ یا } -1070$$

یاد رہے کہ تکمیل مربع کے عمل سے پہلے λ کے سر کو ایک بنا لینا چاہیے۔

$$\text{مثال } 3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0$$

مساوات کو اس طرح ترتیب دو کہ ایسی تمام رقمیں جن میں λ شامل ہوتا ہے سب کی سب دائیں جانب آجائیں۔

$$2\lambda^2 + \lambda = 3$$

طرفین کو 2 پر تقسیم کرنے سے λ کے سر کو ایک بناؤ

$$\text{پس } \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}$$

تکمیل مربع کے لئے λ کے نصف سر کے مربع $(\frac{\lambda}{2})^2$ کو طرفین پر زیادہ کر دو تو

$$\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{پس } \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} = \frac{7}{2}$$

جذر لینے سے

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

مثبت علامت لینے سے

$$\lambda = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\lambda}{2}$$

منفی علامت لینے سے

$$\lambda = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\lambda}{2}$$

پس مساوات مفروضہ $2\lambda^2 + \lambda = 3$ کی دو اصلیں $\frac{\sqrt{7}}{2}$ اور $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ ہیں۔

$$\text{مثال } 3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \text{ مساوات } \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \text{ کو حل کرو۔}$$

لا والی رقموں کو ایک طرف لانے سے

$$۶ - لا^۲ = لا = ۲$$

طرفین کو لا کے سر پر تقسیم کرنے سے

$$لا - \frac{۱}{۶} = لا = \frac{۱}{۶}$$

اگر طرفین پر لا کے نصف سر کا مربع $(-\frac{۱}{۶})$ زیادہ کر دیا جائے تو

$$لا - \frac{۱}{۶} + لا = \frac{۱}{۶} + لا = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۴۹}{۱۴۴} = \left(لا - \frac{۱}{۶} \right)^۲$$

$$لا - \frac{۱}{۶} = \pm \sqrt{\frac{۴۹}{۱۴۴}}$$

اس لئے یا لا = $\frac{۱}{۶} + \frac{۷}{۱۲}$ جس سے لا = $\frac{۱}{۶} + \frac{۷}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$

$$یا لا = \frac{۱}{۶} - \frac{۷}{۱۲} = -\frac{۵}{۶}$$

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں $\frac{۲}{۳}$ اور $-\frac{۵}{۶}$ ہیں۔

۸۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم کی عام سے

عام شکل $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ ہے

اس مساوات میں $لا$ ، $ب$ ، $ج$ کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے

ہم درجہ دوم کی ہر عددی مساوات حاصل کر سکتے ہیں، اس لئے اگر ہم

اس مساوات کو حل کر سکیں، یعنی لا کی ایسی قیمت معلوم مقادیر $لا$ ، $ب$ ، $ج$

کی رقوم میں معلوم کر سکیں جو مساوات میں مندرج کرنے سے طرفین

مساوات کو برابر کر دے تو ایسا خیال کرنا چاہیے کہ ہم نے ہر عددی

مساوات درجہ دوم کو حل کر لیا کیونکہ $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کے حلوں

یا اصلوں میں $لا$ ، $ب$ ، $ج$ کی بجائے مفروضہ مساوات کے عددی سر رکھنے

سے اس کی اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

پس ہم $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کی اصلیں معلوم کرنے کی کوشش

کرتے ہیں، ہم دیکھیں گے کہ پہلے کی ہر ایک مساوات درجہ دوم کی طرح اس کی بھی دو اور صرف دو اصلیں ہیں۔

لا والی رقموں کو ایک طرف لانے سے

$$1 \text{ لا}^2 + \text{ب لا} = \text{ج}$$

لا کے سر پر تقسیم کرنے سے

$$\text{لا} + \frac{\text{ب}}{1} = \frac{\text{ج}}{1}$$

لا کے نصف سر کے مربع $\left(\frac{\text{ب}}{1}\right)^2$ کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$\text{لا} + \frac{\text{ب}}{1} = \frac{\text{ج}}{1} \Rightarrow \left(\frac{\text{ب}}{1}\right)^2 + \frac{\text{ج}}{1} = \frac{\text{ب}^2}{1} + \frac{\text{ج}}{1}$$

$$\frac{\text{ب}^2 - 2\text{ب لا} + \text{لا}^2}{1} = \frac{\text{ج}^2 - 2\text{ج لا} + \text{لا}^2}{1}$$

$$\frac{\text{ب}^2 - 2\text{ب لا} + \text{لا}^2}{1} = \left(\frac{\text{ب}}{1} - \text{لا}\right)^2$$

$$\frac{\text{ب}^2 - 2\text{ب لا} + \text{لا}^2}{1} = \left(\frac{\text{ب}}{1} - \text{لا}\right)^2 \quad (1)$$

پس مساوات کی دو اصلیں $\frac{\text{ب}^2 - 2\text{ب لا} + \text{لا}^2}{1} = \left(\frac{\text{ب}}{1} - \text{لا}\right)^2$ ہیں۔

ضابطہ (۱) ہر مساوات درجہ دوم کے حل کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۔ $5 \text{ لا}^2 = 8 \text{ لا} + 21$ کو حل کرو۔

مساوات کو معیاری صورت $5 \text{ لا}^2 - 8 \text{ لا} - 21 = 0$ میں لانے سے

$$5 \text{ لا}^2 - 8 \text{ لا} - 21 = 0$$

$$\text{یہاں } 5 = \text{ا}, 8 = \text{ب}, 21 = \text{ج}$$

$$\frac{\text{ب}^2 - 2\text{ب لا} + \text{لا}^2}{1} = \left(\frac{\text{ب}}{1} - \text{لا}\right)^2$$

$$\frac{11 \times 2 \times 3 - 2(3 - 1) \sqrt{11 \times 2 \times 3}}{2} =$$

$$\frac{88 - 9 \sqrt{11 \times 2 \times 3}}{2} =$$

$$\frac{49 - 1 \sqrt{11 \times 2 \times 3}}{2} =$$

اب تک جتنی مقداروں سے ہمیں واسطہ پڑا ہے ان کے متعلق ہمیں معلوم ہے کہ خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی ان کا مربع ہمیشہ مثبت ہوتا ہے پس جہاں تک ہم جانتے ہیں عدد (مثبت، منفی، مکسور) ایسا نہیں جس کا مربع - ۹ ہو یعنی ایک ایسے عدد کا معلوم کرنا ممکن نہیں جو صحیح طور پر تقریباً - ۹ کے جذر کو تعبیر کرے۔
ایسی صورت میں مساوات کی اصلیں خیالی کہلاتی ہیں۔

$$لا = \frac{ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴ ا ج}}{۲ ا} \quad \text{مساوات ۱ لا + ب لا + ج = ۰}$$

کی دو اصلیں، ظاہر ہے کہ جب کبھی کسی مساوات کے لئے جملہ ب - ۴ ا ج منفی ہوگا تو مساوات مفروضہ کی اصلیں خیالی ہوں گی۔

۳۹۔ پس درجہ دوم کی مساواتوں کو حل کرنے کے تین طریقے ہیں۔

(۱) اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے

(۲) تکمیل مربع سے

$$(۳) ضابطہ - \frac{ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴ ا ج}}{۲ ا} \quad \text{کی مدد سے}$$

طالب علم کو چاہیے کہ ان تینوں میں اچھی مشق اور دسترس حاصل کرے، سب سے پہلے اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کی جائے، اگر ابدی النظر میں یہ ممکن نہ ہو تو دوسرے یا تیسرے طریقہ سے مدد لی جائے مگر یہ تیسرا طریقہ سراسر دوسرے پر مبنی ہے کیونکہ تکمیل مربع سے ہم نے مساوات لا + ب لا + ج = ۰ کی مجہول مقدار لا کی قیمتیں

لا = $\frac{ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲}$ معلوم کی ہیں، پس اگر مساوات اجزائے ضربی کی
 مدد سے حل نہ ہو سکے تو طالب علم تکمیل مربع کے عمل سے اسے حل کرے۔ ضابطہ
 کا یاد رکھنا بھی کئی لحاظ سے مناسب ہے، اس کی مدد سے صرف یہی نہیں کہ
 ہم کسی مساوات کی اصلوں کو فقط عددی قیمتیں مندرج کرنے سے معلوم
 کر سکتے ہیں بلکہ ہم جانتے ہیں کہ مرکب مقدار $ب^2 - ۴ج$ کی علامت
 اصلوں کی نوعیت کا فیصلہ کرتی ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ درجہ دوم کی عام مساوات $لا + ب + ج = ۰$ ہے
 جس میں $لا$ ، $ب$ ، $ج$ معلوم مقادیر ہیں۔ اسکو حل کرنے سے

$$لا = \frac{ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲}$$

یعنی اس مساوات کی اصلیں الگ الگ $\frac{ب + \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲}$

اور $\frac{ب - \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲}$ ہیں

پس اگر $(ب^2 - ۴ج) =$ مثبت مقدار تو اس کی دونوں اصلیں
 حقیقی اور غیر مساوی ہوں گی۔

مثلاً مساوات $۲لا^۲ + ۵لا - ۶ = ۰$ میں

$ب^2 - ۴ج = ۲۵ - ۴ \times ۲ \times (-۶) = ۲۵ + ۴۸ = ۷۳$ جو ایک مثبت مقدار ہے
 اس لئے اس صورت میں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہونی چاہئیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اس مساوات کے لئے $لا = \frac{۵ \pm \sqrt{۷۳}}{۴}$

$= \frac{۵ \pm \sqrt{۷۳}}{۴}$ یا $۵۸ - ۳۸$ (دونوں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں)
 جب علامت جذر کے اندر کی مقدار مثبت ہو تو ہم اس کا جذر نکال سکتے ہیں

اور اس طرح اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر (۲) $b^2 - 4ac =$ منفی مقدار ہو تو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ علامت جذر کے اندر جو مقدار ہے اس کے منفی ہونے کی وجہ سے ہم اس کا جذر نہیں نکال سکتے۔

مثلاً $2x^2 + 5x + 4 = 0$ اس مساوات کے لئے علامت جذر کے اندر کی مقدار

$$= (b^2 - 4ac) = 25 - 4 \times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7$$

$= -7$ منفی مقدار

اس صورت میں دونوں اصلیں خیالی ہونی چاہئیں۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 32}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

یعنی دونوں اصلیں فی الحقیقت خیالی ہیں، ہم -7 کا جذر نہیں نکال سکتے اس لئے اصلوں کی تقریبی قیمتیں بھی نہیں معلوم ہو سکتیں۔

اگر (۳) $b^2 - 4ac = 0$ تو اصلیں مساوی ہونگی۔

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-b}{2a}$$

یعنی دونوں اصلیں ایک ہی مقدار $-\frac{b}{2a}$ کے مساوی ہیں۔

مثلاً مساوات $2x^2 + 12x + 18 = 0$ میں

$$b^2 - 4ac = 144 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$$

پس مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔

اور وہ فی الحقیقت ہیں بھی کیونکہ

$$۳ = \frac{۱۲ + ۱۲}{۴} = \frac{۱۲ + ۱۲}{۴}$$

$$۳ = \frac{۱۲ + ۱۲}{۴} = \frac{۱۲ + ۱۲}{۴}$$

ہر ایک اصل ۳ کے مساوی ہے۔

مساوات $۱۲ + ۱۲ = ۱۸$ اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$۲(۱۲ + ۱۲) = ۲(۹ + ۹)$$

$$۲(۱۲ + ۱۲) = ۲(۹ + ۹) \quad یا \quad ۲(۱۲ + ۱۲) = ۲(۹ + ۹)$$

یعنی دائیں جانب کا رکن مربع کامل ہے، پس اصلیں لا ۳ اور

لا ۳ ہیں۔

ہم نے اٹھائے عمل میں دیکھا اگر کسی مساوات میں $۱۲ + ۱۲ =$ تو دائیں جانب کا جملہ درجہ دوم مربع کامل ہوتا ہے پس $۱۲ + ۱۲ + ۱۲$ ج کی شکل کے جملہ درجہ دوم کے مربع کامل ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ $۱۲ + ۱۲ =$ یا برعکس اس کے اگر کسی جملہ درجہ دوم کے لئے $۱۲ + ۱۲ =$ تو وہ جملہ مربع کامل ہوگا۔ پس یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ایک مساوات درجہ دوم کی اصلیں کیسی ہیں حقیقی یا خیالی یا مساوی وغیرہ وغیرہ یہ ضروری نہیں کہ مساوات کو حل کیا جائے، صرف یہ معلوم کر لینا کافی ہے کہ اس مساوات کے لئے $۱۲ + ۱۲ =$ کی کیا علامت ہے۔

اگر مثبت ہے تو دونوں اصلیں حقیقی ہیں

اگر منفی " " " " خیالی ہیں

اگر $۱۲ + ۱۲ =$ تو " مساوی ہیں " وغیرہ وغیرہ

اصلوں کی نوعیت کے متعلق یہ بحث مسائل مساوات درجہ دوم سے تعلق رکھتی ہے جو اس کتاب کے حدود سے باہر ہے ہمیں صرف مساوات درجہ دوم کے حل سے سروکار ہے۔

۴۔ متفرق مثالیں

مثال ۱۔ $۲۲۵ = ۳۳ - لا^۲$ کو حل کرو

معیاری صورت میں لانے سے $لا^۲ - ۳۳ - ۲۲۵ = ۰$

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے $(لا - ۹)(لا - ۲۵) = ۰$

یعنی $لا = ۹$ یا ۲۵ جس سے $لا = ۳ \pm$ یا $۵ \pm$

مثال ۲۔ $\frac{۱-لا}{۱+لا} - \frac{۴+لا}{۴-لا} = \frac{۵-لا}{۵+لا} - \frac{۳+لا}{۳-لا}$

طرفین مساوات کو الگ الگ مختصر کرنے سے

$$\frac{لا + ۸ - ۱۵}{(۱+لا)(۴-لا)} = \frac{(لا - ۵ + ۱۵)}{(۵+لا)(۳-لا)}$$

$$\frac{لا ۱۶}{(۱+لا)(۴-لا)} = \frac{لا ۱۶}{(۵+لا)(۳-لا)} \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{۱}{(۱+لا)(۴-لا)} = \frac{۱}{(۵+لا)(۳-لا)} \quad \text{یا}$$

$$لا^۲ - ۴ - لا + ۴ = لا^۲ + ۲ - لا - ۱۵$$

$$\text{جس سے } ۸ - لا = ۸ - لا \quad \text{یعنی } لا = ۱$$

پس $لا = ۱$ اور $لا = ۱$ مطلوبہ اصلیں ہیں۔

مثال ۳۔ $لا^۲ - ۳ - لا = \frac{۶۰}{لا - ۳}$

لا - ۳ کو م کے مساوی رکھنے سے

$$لا - ۳ = \frac{۶۰}{لا - ۳} \quad \text{یعنی } لا^۲ - ۶ - لا + ۳ = ۰$$

$$\text{یعنی } (لا - ۱۲)(لا - ۵) = ۰$$

جس سے $لا = ۱۲$ یا ۵

لیکن ماکوہم نے لا^۲ - ۳ لا کے مساوی فرض کیا تھا اس لئے

$$\text{لا}^۲ - ۳ لا = ۱۲ \quad \text{یا} \quad \text{لا}^۲ - ۳ لا = ۵$$

$$\text{پس لا}^۲ - ۳ لا - ۱۲ = ۰ \quad \text{یا} \quad \text{لا}^۲ - ۳ لا - ۵ = ۰$$

$$\text{یعنی} \quad (۲ + لا)(۴ - لا) = ۰ \quad \text{یا} \quad (۵ - لا)(۱ + لا) = ۰$$

$$\text{پس} \quad لا = ۲ \quad \text{یا} \quad لا = ۵$$

امثلہ نمبری ۹

مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$۱ - ۳ لا^۲ - ۸ لا + ۳ = ۰$$

$$۳ لا^۲ - ۸ لا - ۳ = ۰$$

$$۵ - ۳ لا^۲ - ۸ لا + ۳ = ۰$$

$$۹ = ۲(۱ - لا)$$

$$۰ = ۳۶ - ۲\left(۳ - \frac{لا}{۲}\right) - ۹$$

$$۱۱ - ۵(۳ + لا۲) + لا۴ + (۳ + لا۲) = ۰$$

$$۱۳ - (۱ - لا)(۱ + لا۲) + (۱ - لا)(۵ + لا۳) = ۰$$

$$\frac{۵ - لا}{۱۳ - لا۲} = \frac{۴ - لا۵}{۵ - لا۴} \quad \text{۱۳} = \frac{(۳ - لا۲)۳}{لا۴} + \frac{۳ - لا۲}{۵}$$

$$۱۵ - (۱ + لا۴) + لا۴ + ۱۹ لا = ۱۸ لا$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تکثرت میٹرکیو لیشن اختیاری} \\ ۰ = ۴ \frac{۴}{۴} + \frac{۳ + لا}{۳ - لا} - \frac{۳ - لا}{۳ + لا} (۲) \end{array} \right.$$

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۲ + لا} - \frac{۲}{۱ - لا} \quad ۱۶$$

$$\frac{۲۵}{۱۲} = \frac{۱ + لا}{لا} + \frac{لا}{۱ + لا} \quad ۱۷$$

$$۰ = \frac{۱۱ - لا۵}{۲ - لا} - \frac{۱ - لا۳}{۲ + لا} + \frac{لا۲}{۱ - لا} \quad ۱۹$$

$$\frac{۱۰}{۳} = \frac{۳ + لا}{۲} + \frac{۲}{۳ + لا} \quad ۱۸$$

$$۲۱ - لا^۲ - ۳ لا = ۶۵۱$$

$$۰ = ۳۵۱ - لا^۲ - ۳ لا$$

$$۲۲ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

ذیل کی مساداتوں کو حل کرو، اگر ان مساداتوں میں اصلوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک معلوم نہ ہو سکیں تو انھیں اعمالیہ کے دو سر سے مقام تک صحیح طور پر دریافت کرو

$$۲۳ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۲۴ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۲۵ - ۵ - ۳ - ۳ - ۳ - ۳ = ۰$$

$$۲۶ - (۳ - ۱)(۲ + ۱) + (۳ - ۱)(۱ + ۱) = ۰$$

$$\frac{۵ - ۳}{۱ - ۱} = (۱ + ۱) ۲ - ۲۸$$

$$۲۷ = \frac{۱}{۹ + ۱} + \frac{۱}{۶ + ۱} + \frac{۱}{۳ + ۱}$$

$$۲۸ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۲۹ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۰ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۱ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۲ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۳ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۴ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۵ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۶ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۷ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۸ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۳۹ - ۳ - ۳ - ۳ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$۴۰ - (۳ + ۱)(۳ + ۱)(۲ + ۱)(۱ + ۱) = ۰$$

$$۴۱ - (۳ + ۱)(۲ + ۱)(۱ + ۱) = ۰$$

$$۴۲ - (۵ + ۱)(۴ - ۱)(۳ - ۱)(۲ + ۱) = ۰$$

$$۴۳ - \frac{۳ - ۱}{۳ + ۱} + \frac{۲ - ۱}{۲ + ۱} = \frac{۳ - ۱}{۳ + ۱} + \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱}$$

$$۴۴ - \frac{۳}{(۲ + ۱) ۲} - \frac{۱}{۱ + ۱} = \frac{۲}{۵ + ۱} - \frac{۱}{۱ + ۱}$$

۴۵ - اب ہم چند ایسے عبارتی سوالات حل کریں گے جن سے درجہ دوم کی مساداتیں پیدا ہوتی ہیں۔

مثال ۱ - دو عددوں کا فرق ۴ ہے اور ان کے مربعوں کا مجموعہ ۱۰۶ ہے، انھیں

معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک عدد لا ہے، دوسرا لا + ۴ ہوگا۔

بوجب شرائط سوال لا + ۲ (لا + ۴) = ۱۰۶

$$۲ لا + ۸ + ۱۶ = ۱۰۶$$

یعنی

$$۲ لا + ۸ = ۹۰$$

$$۲ لا + ۴ = ۸۵$$

یعنی

$$۰ = (۹ + لا)(۵ - لا)$$

اس لئے لا = ۹ یا ۵

اگر لا کو ۵ کے مساوی فرض کیا جائے تو چھوٹا عدد ۵ ہے اور بڑا عدد

۹ = ۴ + ۵ پس ایک عددوں کا جوڑا جو شرائط مساوات کو پورا کرتا ہے ۹، ۵ ہے

اسی طرح اگر لا = ۹ تو بڑا عدد ہوگا ۹ + ۴ = ۱۳

پس دوسرا جوڑا ۱۳، ۹ ہے۔

مثال ۲۔ ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے ۵۰ میل فاصلہ طے کرتی ہے،

اگر اس کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ کم ہوتی تو یہی فاصلہ طے کرنے میں اس کو ۵ گھنٹے

اور لگتے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ گاڑی کی رفتار لا میل فی گھنٹہ ہے۔

لا میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے ۵۰ میل فاصلہ طے کرنے میں $\frac{۵۰}{لا}$

گھنٹے صرف ہونگے اور لا ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے وہی فاصلہ طے کرنے میں

$$\frac{۵۰}{لا - ۵}$$

اس لئے شرائط سوال کے مطابق $\frac{۵۰}{لا} = \frac{۵۰}{لا - ۵} - ۵$ (۱)

ضرب دینے سے $۵۰(لا - ۵) = ۵۰لا - ۵(لا - ۵)$

$$۵۰لا - ۲۵۰ = ۵لا - ۲۵$$

$$۴۵لا = ۴۷۵$$

$$(لا - ۳۰)(لا + ۲۵) = ۰$$

جس سے $لا = ۳۰$ یا $لا = ۲۵$

پس ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتی ہے، منفی جواب ناقابل تسلیم ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ہر مساوات درجہ دوم کی دو اصلیں ہوتی ہیں، عبارتی سوالوں کے حل کرنے میں جو مساواتیں رونمایا ہونگی ہم دیکھیں گے کہ ان کی بعض اصلیں شرائط سوال کو پورا نہیں کریں گی، موجودہ قیمت میں منفی رفتار سے یہ مراد ہوگی کہ گاڑی ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے پیچھے کی طرف جاتی ہے۔

یا شرائط سوال کی مناسب ترمیم سے ہم منفی جواب کو کچھ معنی پہنا سکتے ہیں۔ $لا = ۳۰$ اور $لا = ۲۵$ شرائط مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں، اگر ہم لا کی بجائے $-لا$ لکھیں تو مساوات محصلہ ہوگی

$$-لا = \frac{۴۵۰}{۵ - لا} = \frac{۴۵۰}{۵ - لا} \quad (۲)$$

اور اس مساوات کی اصلیں $-لا = ۳۰$ اور $-لا = ۲۵$ ہونگی
اب مساوات (۲) کی علامات دونوں طرف بدلنے سے

$$لا = \frac{۴۵۰}{۵ + لا} = \frac{۴۵۰}{۵ + لا}$$

اور یہ ذیل کے عبارتی سوال کی جبریہ صورت ہے۔

ایک گاڑی ۴۵۰ میل یکساں رفتار سے جاتی ہے اگر اس کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو فاصلے طے کرنے میں اسے ۵ گھنٹے کم صرف ہوتے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

مثال ۳۔ ایک شخص نے اپنا گھوڑا ۱۰۵ روپیہ کو بیچا، اس کا نقصان فی صد روپیوں کی اس تعداد کا $\frac{۱}{۵}$ تھا جو اس نے گھوڑے کی خرید میں ادا کی، گھوڑے کی قیمت خرید معلوم کرو۔

فرض کرو کہ گھوڑے سے قیمت خرید لا روپیہ ہے

$$\frac{لا}{۵} = \text{نقصان فی صد}$$

$$\text{گھوڑے کی قیمت خرید لا روپیہ پر نقصان} = \frac{لا}{۵ \times ۱۰۰} = \frac{لا^۲}{۵۰۰} \text{ روپیہ}$$

$$\text{قیمت فروخت} = (لا - \frac{لا^۲}{۵۰۰}) \text{ روپیہ}$$

$$\text{اس لئے } لا - \frac{لا^۲}{۵۰۰} = ۱۰۵$$

$$۰ = ۵۲۵۰۰ + لا - لا^۲$$

$$۰ = (۳۵۰ - لا)(۱۵۰ - لا) \text{ یعنی}$$

$$لا = ۳۵۰ \text{ یا } ۱۵۰ \text{ پس}$$

اور ان میں سے ہر ایک قیمت شرائط سوال کو پورا کرتی ہے۔

پس قیمت خرید ۳۵۰ روپیہ سے یا ۱۵۰ روپیہ۔

مثال ۴۔ دونلیاں مل کر ایک حوض کو ۱۲ منٹ میں بھر دیتی ہیں، اگر بڑی ٹلی اسی حوض کو چھوٹی ٹلی کی نسبت ۱۰ منٹ کم عرصہ میں بھر دے تو بتاؤ کہ یہ ٹلیاں فرداً فرداً حوض کو کتنی دیر میں بھر دینگیں۔

فرض کرو کہ ٹلیاں الگ الگ حوض کو لا اور لا۔۱۰ منٹ میں بالترتیب

بھر دیتی ہیں۔

اگر یہ ایک ساتھ کھول دی جائیں تو یہ دونوں ملکر ایک منٹ میں حوض کا $(\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا-۱۰})$

واں حصہ بھر دینگیں، لیکن حسب مفروض یہ ایک منٹ میں حوض کا $\frac{۱}{۱۲}$ واں حصہ بھرتی ہیں،

$$\text{اس لئے } \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا-۱۰}$$

$$۱۲ \text{ یعنی } ۱۲(لا - ۱۰) = لا(لا - ۱۰)$$

$$۰ = ۱۲۰ + لا - لا^۲ \text{ پس}$$

$$۰ = (۳۰ - لا)(۴ - لا) \text{ جس سے}$$

$$لا = ۳۰ \text{ یا } ۴ \text{ پس}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ چھوٹی ٹلی حوض کو ۳۰ منٹ میں اور بڑی ۴ منٹ میں

بھروسے گی۔ دوسرا حل یہ بنا قابل تسلیم ہے۔

مثال ۵۔ وسطی تقسیم۔ ایک مفروضہ خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ کل خط اور ایک حصہ کی سطح دوسرے حصے کے مربع کے مساوی ہو یا دوسرے الفاظ میں فرض کرو کہ ایک خط AB کا طول l ہے، اس پر ایک ایسا نقطہ N معلوم کرو کہ



$AB \times BN = AN^2$
فرض کرو کہ

$AN = l$ ، $BN = l - l$ ، $AB = l$

اب چونکہ $AB \times BN = AN^2$

اس لئے $l(l - l) = l^2$

یعنی $l^2 - l^2 = l^2$

پس $l = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 - 4l^4}}{2} = \frac{l^2 \pm \sqrt{-3l^4}}{2}$

یعنی l کی دو قیمتیں ہیں $\frac{l}{2} (1 \pm \sqrt{-3})$

پس AB کی تقسیم وسطی داخلا اور خارجاً دونوں طرح ہو سکتی ہے

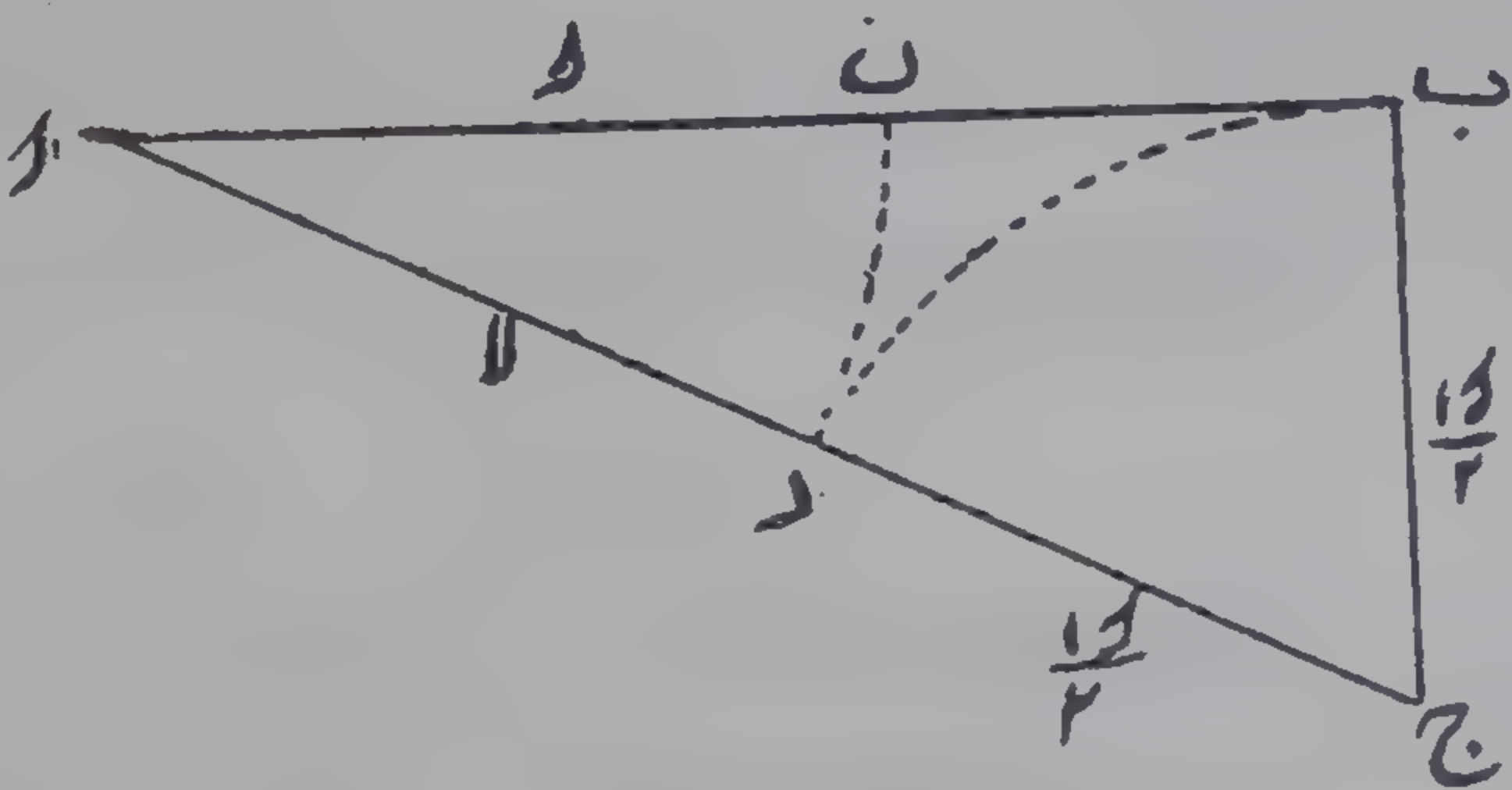
(داخلاً) B ج، AB سے
زاویہ قائمہ بناتا ہے اور

اس کا طول $\frac{l}{2}$

اس لئے $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}$

اس لئے $AB = AC$ ، C کو B ج کے مساوی بناؤ اور AN کو دو



۹۳۶ ہے، ان کی عمریں معلوم کرو۔

۸۔ صحیح متصل عددوں کے ایسے جوڑے معلوم کرو جن کے حاصل ضرب ۳۴۲

ہوں، نیز ایسے جوڑے معلوم کرو جن کے حاصل ضرب ۲۱۰ ہوں۔

۹۔ دو صحیح متصل عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۳۱۳ ہو۔

۱۰۔ دو صحیح متصل عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۱۱۰۵ ہو۔

۱۱۔ تین متصل صحیح عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۴۳۴ ہو۔

۱۲۔ دو متصل صحیح عدد معلوم کرو جن کے مکعبوں کا فرق ۱۲۷ ہو۔

۱۳۔ تین متصل طاق صحیح عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۲۵۱ ہو۔

۱۴۔ ایسا عدد دریافت کرو جس کا مربع اس کے دو چند سے بقدر ۱۲۹۵ کے بڑا ہو۔

۱۵۔ اگر ایک عدد کے مربع میں اس کا سہ چند جمع کر دیا جائے تو حاصل جمع ۵۹۸ ہوتا

ہے، وہ عدد معلوم کرو۔

۱۶۔ ایسے دو عدد معلوم کرو جن کا فرق ۳ ہو اور جن کے مربعوں کا مجموعہ ۱۸۵ ہو۔

۱۷۔ دو متصل صحیح اعداد کے متکافیوں (الٹوں) کا مجموعہ $\frac{۲۵}{۱۵۶}$ ہے انہیں معلوم کرو۔

۱۸۔ دو عددوں کا مجموعہ ۲۵ ہے اور ان کے متکافیوں کا مجموعہ $\frac{۱}{۱۵}$ ہے انہیں

معلوم کرو۔

۱۹۔ دو عددوں کا فرق ۵ ہے اور ان کے متکافیوں کا فرق ۱۰ ہے انہیں معلوم کرو۔

۲۰۔ ۲۸ سال کے بعد ایک شخص کی عمر اس کی ۲۸ سال پہلے کی عمر کے مربع سے

مساوی ہوگی، اس کی موجودہ عمر معلوم کرو۔

۲۱۔ اگر ایک ریل گاڑی کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو ۱۵۰ میل کا فاصلہ

طے کرنے میں اسے ایک گھنٹہ کم لگتا، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک شخص ۱۰.۸ میل چلتا ہے، اگر اس کی رفتار ۲ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو

وہ اس مسافت کو $\frac{۱}{۴}$ گھنٹہ کم عرصہ میں طے کر لیتا، اس کی رفتار معلوم کرو۔

۲۳۔ جتنے عرصہ میں ایک ریل گاڑی ۲۰.۹ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے اس سے

۱۶ منٹ کم عرصہ میں یہ فاصلہ طے ہو سکتا ہے بشرطیکہ گاڑی کی رفتار ایک میل فی گھنٹہ

زیادہ کر دی جائے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۴۔ اگر ایک گاڑی کا پیہ جس کا محیط $\frac{1}{2}$ فٹ ہے ایک چکر لگانے میں ایک سکند زیادہ سے تو گاڑی کی رفتار $\frac{1}{2}$ میل فی گھنٹہ کم ہوگی، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک شخص نے ایک گھڑی ۹۶ روپیہ کو بیچی اور جتنے روپیہ میں اسے خریدا تھا اتنے فیصد نفع اٹھایا، اس کی قیمت خرید معلوم کرو۔

۲۶۔ ایک شخص نے اپنی موٹر سیکل کو ۱۶ پونڈ میں بیچا اور جتنے پونڈ اس کی قیمت خرید تھی اتنے فیصد نقصان اٹھایا، سیکل کی قیمت خرید معلوم کرو۔

۲۷۔ ایک شخص نے ۳۷ روپیہ کو گھوڑا خریدا اور ۵۳ روپیہ کو لائی صد کے نفع پر بیچ دیا، لا معلوم کرو۔

۲۸۔ ۱ اور ۲ دن میں کر لیتے ہیں، اسی کام کو ختم کرنے میں ۱، ۲ اور ۳ دن زیادہ لیتا ہے، بتاؤ کہ ۱، ۲ اور ۳ دن میں ختم کر سکتا ہے۔

۲۹۔ ایک خاص کام کی تکمیل میں ۱، ۲ اور ۳ دن زیادہ لیتا ہے اور ۵ دن زیادہ لیتا ہے اور ۷ دن زیادہ لیتا ہے، بتاؤ کہ تینوں الگ الگ اسے کتنے عرصہ میں کر سکیں گے۔

۳۰۔ ایک مستطیل کھیت کا رقبہ ۲۰۰۰ مربع گز ہے اور اس کا مجموعہ اضلاع ۱۰۰ گز ہے اس کے اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۳۱۔ ایک مستطیل کھیت کا ایک ضلع دوسرے کی نسبت بقدر ۷۰ فٹ کے بڑا ہے اور اس کا رقبہ ۲۹۴ مربع فٹ ہے، اس کے اضلاع معلوم کرو۔

۳۲۔ مستطیل شکل کے دو کھیتوں کا رقبہ ایک ہی ہے ۸۰۰ مربع گز، لیکن ان کے طولوں کا فرق ۱۰۰ گز ہے اور عرضوں کا فرق ۲۰ گز، ان کے اضلاع معلوم کرو۔

۳۳۔ ایک مستطیل کھیت ۵۰ فٹ لمبا اور ۳۳ فٹ چوڑا ہے، اس کے چاروں طرف باہر کی طرف یکساں چوڑائی کا ایک راستہ ہے جس کا رقبہ ۵۴۰۰ مربع فٹ ہے اس کی چوڑائی معلوم کرو۔

۳۴۔ مربع پتھروں سے ایک کمرہ کی فرش بندی کرنے کے لئے ۳۶۰ پتھر درکار ہوتے ہیں، اگر ہر ایک پتھر ایک انچ زیادہ لمبا اور ایک انچ زیادہ چوڑا ہو تو ۲۵۰ پتھروں کی

ضرورت ہوتی ہے، پتھروں کے الہام معلوم کرو۔

۳۳۔ دونلیاں ہلکے ایک حوض کو ۳۰ منٹ میں بھر دیتی ہیں اور بڑی ملی اسس کو بھرتے ہیں چھوٹی ملی کی نسبت ایک گھنٹہ کم لیتی ہے، بتاؤ کہ چھوٹی ملی اس کو کتنے منٹ میں بھر سکتی ہے۔

۳۴۔ انڈوں کی قیمت میں ۲ آنہ فی درجن تخفیف ہونے کے باعث ۲ روپیہ ۱۰ آنہ میں معمول سے ۶ زیادہ انڈے آسکتے ہیں، انڈوں کی قیمت فی درجن معلوم کرو۔

۳۵۔ میں نے ایک صدر روپیہ میں کرکٹ کھیلنے کے چند گیند خریدے، اگر قیمت خرید فی گیند ایک روپیہ کم ہوتی تو اسی رقم میں ۵ گیند اور خرید ہو سکتے ہیں۔ ہر گیند کی قیمت دریافت کرو۔

۳۸۔ خط ۱ ب کا طول



۱ ب کو ج تک اتنا خارج کرو کہ ۱ ج \times ۱ ب ج = ۳۹ مربع انچ۔ ۱ ج اور ۱ ب ج کے طول معلوم کرو

۳۹۔ خط ۱ ب کا طول ۲۰ انچ ہے، اس کو دو حصوں ۱ ج اور ۱ ب ج میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ۱ ج \times خط ۱ ب ج اور ۱ ب کے درمیان وسط تناسب ہے، ۱ ج کا طول معلوم کرو۔

۴۰۔ اگر ۱ ب = ۱ تو اوپر کا سوال حل کرو۔

مساوات درجہ دوم کا ترسیم حل

۴۲۔ ہر مساوات درجہ دوم کو معیاری صورت میں لانے سے مساوات کے دائیں جانب ایک جملہ درجہ دوم رہ جاتا ہے اور دوسری طرف صفر، مثلاً مساوات $لا + ۱۱ = ۷$ لا کو معیاری صورت میں لانے سے حاصل ہوگا $لا - ۷ = ۱۱$ ۔

موخر الذکر صورت میں مساوات کے دائیں طرف کا رکن $لا - ۷$ لا + ۱۱ کا ایک جملہ یا تفاعل درجہ دوم ہے کیونکہ لا کی بڑی سے بڑی قوت اس میں دو ہے، اب اگر لا مختلف قیمتیں اختیار کرے تو یہ تفاعل $لا - ۷ = ۱۱$ بھی مختلف قیمتیں اختیار کرے گا اور لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں $لا - ۷ = ۱۱$ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی، پس اگر بلحاظ دوستانہ محوروں کے لا کی قیمتوں کو بطور فصل اور $لا - ۷ = ۱۱$ کی متناظر قیمتوں کو بطور معین مرسم کیا جائے تو لا اور $لا - ۷ = ۱۱$ کی متناظر قیمتوں کے ہر ایک جوڑے سے ایک نقطہ حاصل ہوگا اور ایسی متناظر قیمتوں کے ہیشمار جوڑوں سے ہیشمار نقطے ملیں گے جن کو ملائے سے ایک منحنی حاصل ہوگا جو جملہ درجہ دوم یا تفاعل $لا - ۷ = ۱۱$ کی ترسیم ہوگا۔ دیکھو دفعہ ۴۳۔

طالب علم اس ترسیم پر کوئی نقطہ لے اور اس کے محدودوں پر غور کرے، ایسے کسی نقطہ کا فصل لا کی ایک قیمت ہے اور اس کا معین تفاعل $لا - ۷ = ۱۱$ کی متناظر قیمت ہے، پس لا کی مختلف قیمتوں کے لئے

اس ترسیم کے معین تفاعل $لا - ۷ = ۱۱$ کی مختلف قیمتوں کو تعمیر کرتے ہیں۔ ہم لا اور تفاعل $لا - ۷ = ۱۱$ کے باہمی رشتہ سے بخوبی واقف ہیں، لا کی کسی ایک قیمت کے ساتھ تفاعل $لا - ۷ = ۱۱$ کی ایک قیمت ملے گی ہے اور تفاعل کی کسی ایک قیمت کے ساتھ

لاکی ایک قیمت وابستہ ہے، اب اگر ان میں سے کسی ایک کی کوئی قیمت دی ہوئی ہو تو اس ترسیم کی مدد سے دوسرے کی متناظر قیمت فقط پیمائش سے معلوم ہو سکتی ہے مثلاً اگر $۲ = ۱۱$ تو فصلہ ۲ کے جواب میں جو معین سے اس کا طول لا۔ ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمت ہے اور برعکس اس کے اگر لا۔ ۷ لا + ۱۱ کی کسی مقررہ عددی قیمت (مثلاً - ۱) کے لئے ہمیں لاکی متناظر قیمت معلوم کرنا منظور ہو تو ہمیں شکل میں اس مقررہ طول (۱) کا ایک معین قائم کرنا چاہیے، اس معین کے جواب میں جو فصلہ ہے اس کا طول لاکی متناظر قیمت ہے۔

اب بالخصوص فرض کرو کہ تفاعل لا۔ ۷ لا + ۱۱ صفر کے مساوی ہے اور تفاعل کی اس قیمت (صفر) کے جواب میں ہم لاکی متناظر قیمت یا قیمتیں معلوم کرنا چاہتے ہیں یا بالفاظ دیگر ہمیں شکل سے لاکی وہ قیمت یا قیمتیں معلوم کرنا ہے جو لا۔ ۷ لا + ۱۱ کو صفر بنا دیں۔

اس صورت میں چونکہ لا۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ اس لئے معین زیر بحث کا طول صفر ہوگا۔ پس ہمیں شکل میں ترسیم پر کے ان نقاط کی تلاش کرنی چاہیئے جن کے معین صفر ہوں، ظاہر ہے کہ ایسے نقطے صرف وہی ہو سکتے ہیں جہاں ترسیم محور لا سے ملتی ہے۔

کیونکہ اس محور کے ہر نقطہ کا ما' محدود صفر ہے، پس جن نقاط پر مسخنی محور لا سے ملتا ہے ان کے معین صفر ہیں یعنی ان نقاط کے لئے لا۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰۔ اس لئے ان کے فصلے لاکی مطلوب قیمتیں ہیں۔

اب ہم نے ایک ضروری سوال کو حل کر لیا، ہم نے ترسیم کی مدد سے لاکی وہ قیمتیں معلوم کر لیں جو لا۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ مساوات لا۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کے حل یا اصل سے لاکی وہ قیمت یا قیمتیں مراد ہیں جو طرفین مساوات کو برابر کر دیں یعنی جو تفاعل لا۔ ۷ لا + ۱۱ کو صفر کے مساوی بنا دیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم اور محور لا کے نقاط تقاطع کے فصلے اس شرط کو پورا کرتے ہیں۔

پس مساوات $لا^۲ - ۷لا + ۱۱ = ۰$ کو ترتیبی طریق پر حل کرنے کے لئے ہم نے اسے معیاری صورت میں لکھا، دائیں جانب کے جملہ درجہ دوم یا تفاعل کی ترتیب بنائی، جن نقاط پر یہ ترتیب محور لا کو قطع کرتی ہے ان کے فصلوں کے طول مساوات $لا^۲ - ۷لا + ۱۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

اور بالعموم مساوات $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کو ترتیبی طریق پر حل کرنے کے لئے ہمیں $لا^۲ + ب لا + ج$ کی ترتیب بنانی چاہیے، جن نقاط پر یہ ترتیب محور لا سے ملتی ہے ان کے فصلے مساوات $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

۴۴۔ اس دفعہ کی جملہ امثلہ کو طالب علم غور سے پڑھے اور مختلف بیانون پر شکلیں بنا کر خود انھیں حل کرے، قریب ترین درجہ صحت تک نتائج حاصل کرنیکی کوشش کیجے۔

مثال ۱۔ $لا^۲ - ۷لا + ۱۱$ کی ترتیب بناؤ اور مساوات $لا^۲ - ۷لا + ۱۱ = ۰$ کی اصلیں معلوم کرو

اثنائے عمل میں دیکھو کہ $لا^۲ - ۷لا + ۱۱$ کی کم سے کم قیمت کیا ہے، نیز لا کی کن

حقیقی قیمتوں کے لئے یہ تفاعل مثبت ہے اور کن کے لئے منفی

حسب دفعہ سابق ہم تفاعل

$لا^۲ - ۷لا + ۱۱$ کی ترتیب بناتے

ہیں، طالب علم جانتا ہے کہ

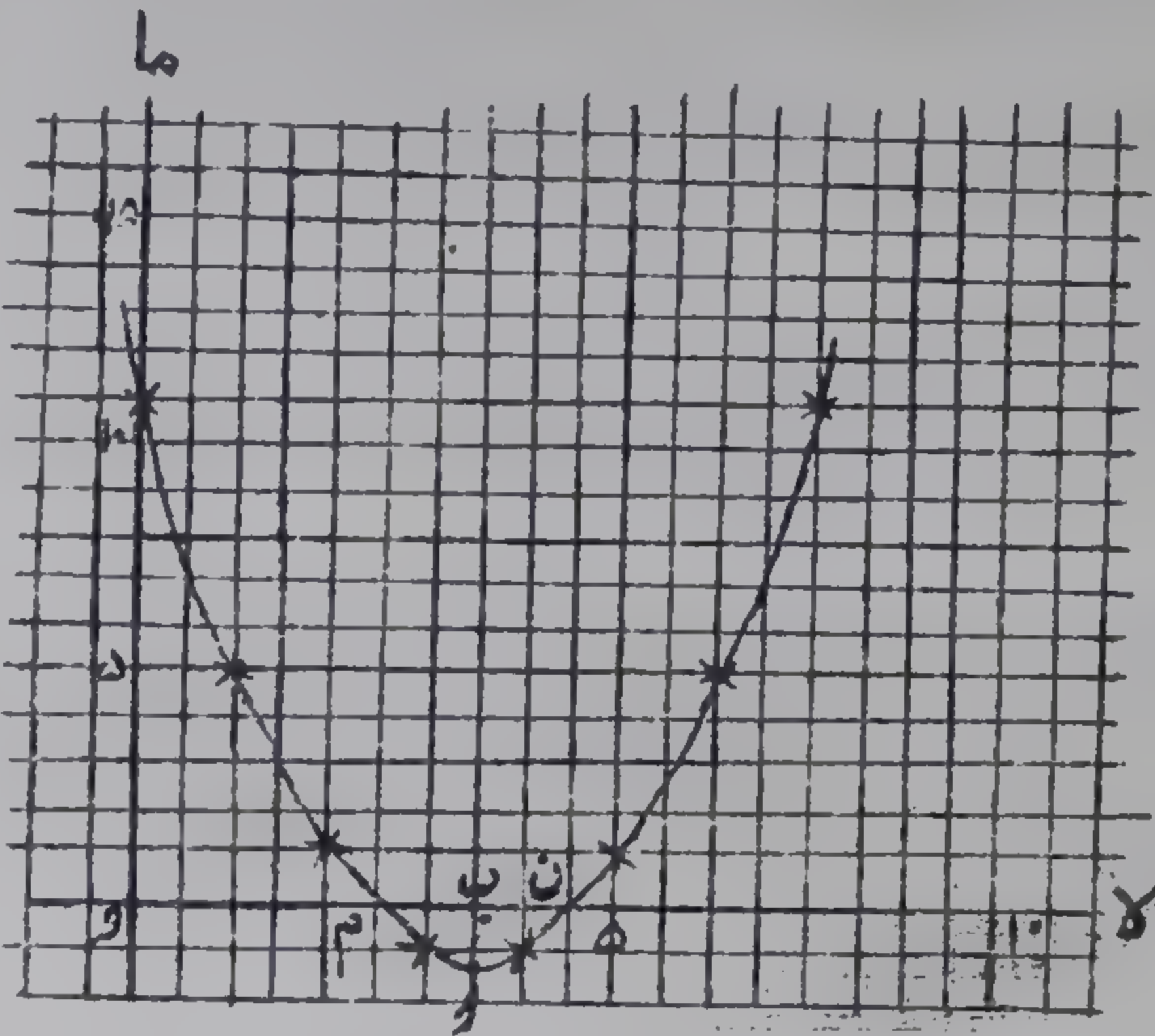
یہاں دو متغیر لا اور $لا^۲ - ۷لا + ۱۱$

ہیں، لا کی قیمتوں کو محور لا

پر نا پو، پیمانہ ایک اینچ = ۵

یعنی دو چھوٹے حصے = ۱

$لا^۲ - ۷لا + ۱۱$ کی قیمتوں کو محور لا کے متوازی نا پو، پیمانہ ایک اینچ = ۱۰ یعنی ایک چھوٹا حصہ = ۱ جب



۷	۶	۵	۴	۳۵۵	۳	۲	۱	لا = ۰
۳۶	۲۵	۱۶	۱۳۵۲۵	۹	۴	۱		لا = ۰
۳۸	۳۱	۲۳	۱۷	۱۳۵۵	۱۰	۳	۲	لا = لا + لا = ۱۱
۱۱	۵	۱	۱	۱۵۲۵	۱	۱	۵	لا = لا + لا = ۱۱

اس لئے (۰، ۱۱)، (۱، ۵)، (۲، ۱)، (۳، ۱)، (۵، ۳)، (۱۲، ۵) ترسیم پر کے نقطے ہیں، شکل بالا میں انہیں مرسم کر کے ایک منحنی ان نقاط میں سے کھینچا گیا ہے جو لاء۔ ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم ہے۔

یہ ترسیم محور لا سے دو نقاط م اور ن پر ملتی ہے، ان نقطوں کے معین صفر ہیں یعنی ان نقاط کے لئے لاء۔ ۷ لا + ۱۱ صفر کے مساوی ہے۔ پس ان نقطوں کے فصلے لا کی مطلوبہ قیمتیں ہیں جو مساوات لاء۔ ۷ لا + ۱۱ = کو پورا کرتی ہیں۔

م کا فصلہ = ۲ و ۳

اور ن کا فصلہ = ۴ و ۶

اس لئے ۲ و ۳ اور ۴ و ۶ مساوات مفروضہ لاء۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط م اور ن کے درمیان منحنی کا جو حصہ ہے وہ محور لا سے نیچے واقع ہے یعنی لاء۔ ۷ لا + ۱۱ کی قیمت منفی ہے جب تک کہ لا کی قیمت ۲ و ۳ اور ۴ و ۶ کے درمیان واقع ہے، لیکن لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے لاء۔ ۷ لا + ۱۱ مثبت ہے۔

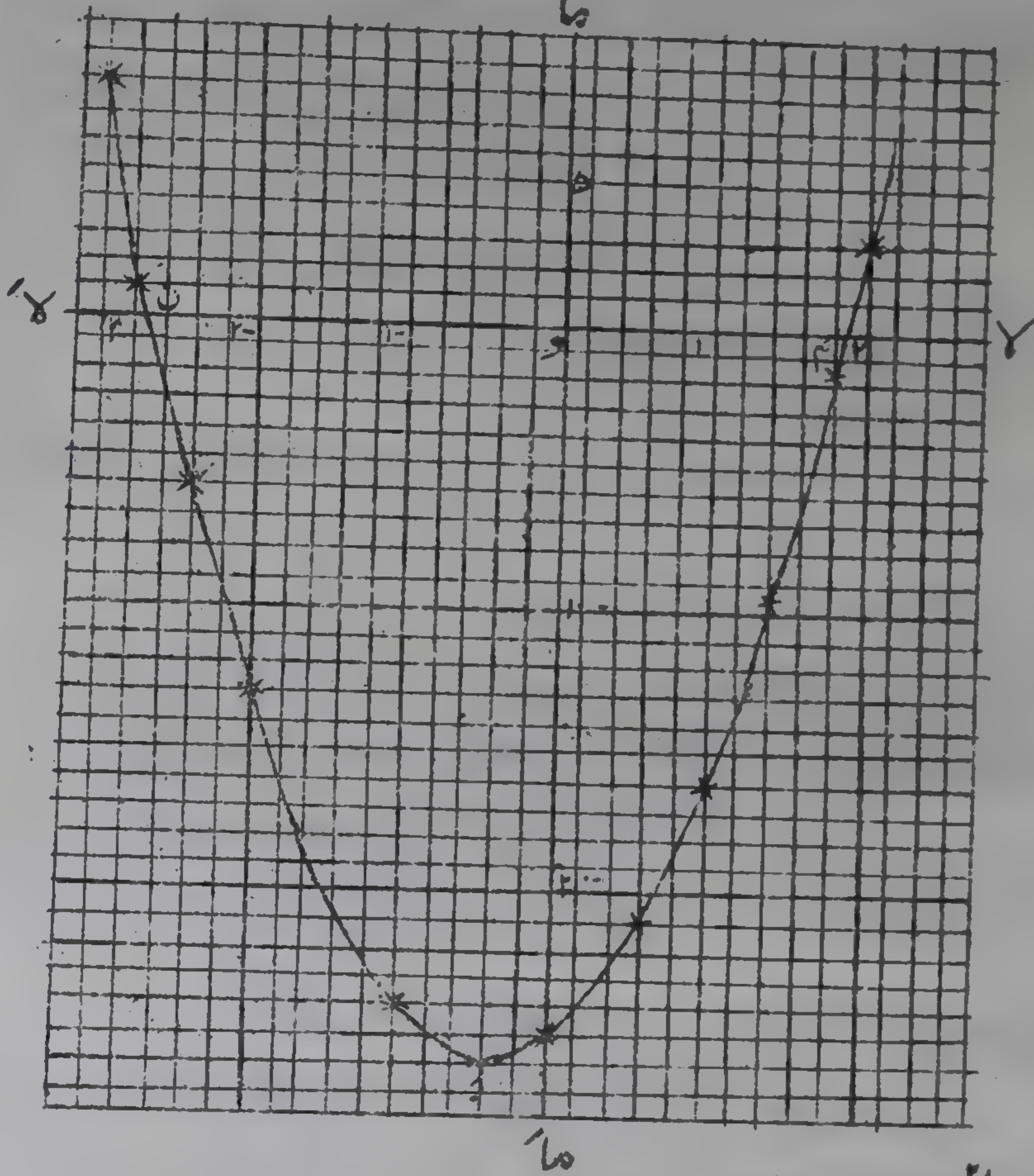
لاء۔ ۷ لا + ۱۱ کی کم سے کم جبریہ قیمت بڑے سے بڑے منفی معین اب = - ۲ و ۵ سے تعبیر ہوگی۔ جبریہ طریق پر بھی یہ قیمت باسانی معلوم ہو سکتی ہے

لاء۔ ۷ لا + ۱۱ = (لا - $\frac{۵}{۷}$)^۲ - $\frac{۵}{۷}$ ، اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے (لا - $\frac{۵}{۷}$)^۲ مثبت ہے اور صفر سے زیادہ ہے سوائے اس صورت کے جبکہ لا = $\frac{۵}{۷}$ پس اگر لا = $\frac{۵}{۷}$ تو لاء۔ ۷ لا + ۱۱ = (لا - $\frac{۵}{۷}$)^۲ - $\frac{۵}{۷}$ = - $\frac{۵}{۷}$ جو اس تغاغل کی کم سے کم قیمت ہے۔

نوٹ: جبریہ طریق پر مساوات لاء۔ ۷ لا + ۱۱ = ۰ کو حل کرنے سے

$$لا = \frac{۷ \pm \sqrt{۷^2 - 4 \times ۱۱}}{2} = \frac{۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۴۴}}{2} = \frac{۷ \pm \sqrt{۵}}{2}$$

اگر ۵ کی تقریبی قیمت ۲۵۳۸۲ فرض کیا جائے تو ۱۸ کی قیمتیں ۳ اور ۴ ما



اور ۳۸۲ حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۲۔

ترسیمی طریق سے

مسادات

$$۵ لا + ۴ لا - ۲۵ = ۰$$

کو حل کرو۔

سب سے

پہلے $۵ لا$

$$۴ لا + ۲۵ =$$

کی رسم بنائیں

گے،

اختصار کی خاطر

$$۵ لا + ۴ لا - ۲۵ = ۰$$

۳-	۲۵۳۸	۲-	۱۵۴	۱۰۰	۲	۱۵۸	۱۵۴	۱	۵۴	۰=۵ لا
۴۵	۲۵۳۸	۲۰	۱۲۵۸۰	۵	۲۰	۱۶۵۴۰	۹۵۸۰	۵	۱۵۸۰	۵ لا=۰
۴۶	۳۳۵۴۰	۳۳	۲۱۵۴	۲۹	۱۶	۱۶۵۸	۱۹۵۴	۲۱	۲۲۵۴	۲۵ لا=۲۵
۸	۵۵۸	۱۳	۱۸۵۴	۲۴	۳	۱۵۴	۹۵۴	۱۶	۲۰۵۸	۵ لا+۴ لا-۲۵=۰

لا کی قیمتوں کو محور لا پر ناچو، بیانہ $۲=۱$

تفائل $۵ لا + ۴ لا - ۲۵ = ۰$ کی قیمتوں کو محور ما پر ناچو بیانہ $۱۰=۱$ ۔ نقاط (۲۰۵۸، ۲۰۵۸)

(۱۱-۱۶) (۱۱۴-۹۶۶) (۳،۲) وغیرہ کو مرتسم کرنے سے اوپر کی ترسیم بنائی گئی ہے، جن نقاط م اور ن پر یہ ترسیم محور لا کو قطع کرتی ہے ان کے فصلے مساوات کی مطلوبہ اصلیں ہیں۔

$$و م = ۱۵۹ \text{ تقریباً}$$

$$\text{اور } و ن = ۲۵۷$$

پس ۱۵۹ اور ۲۵۷ مساوات ۵ لا + م - ۲۵ = کی اصلیں ہیں۔

$$\text{تصدیق۔ جب } لا = ۱۵۹ \text{ تو } لا + م - ۲۵ = ۲۵۷ + (۳۵۶۱) ۵ = ۲۵ - ۷۶۶ + ۲۵$$

$$۲۵ - ۷۶۶ + ۱۸۵۰۵ =$$

$$۵۶۵ =$$

پس جب، لا = ۱۵۹ تو ۵ لا + م - ۲۵ تقریباً صفر کے مساوی ہے اس لئے ۱۵۹ ایک اصل ہے، اسی طرح طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ۲۵۷ بھی مساوات معلومہ کی اصل ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی قیمتوں - ۲۵۷ اور ۱۵۹ کے درمیان جو ترسیم کا حصہ ہے وہ محور لا کے نیچے واقع ہے، یعنی اس حصہ کے سب معین منفی ہیں، پس لا کی ان تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جو - ۲۵۷ اور ۱۵۹ کے درمیان واقع ہیں ۵ لا + م - ۲۵ منفی ہے لیکن ان حدود کے باہر سب قیمتوں کے لئے یہ مثبت ہے۔

نیز بڑے سے بڑا منفی معین تقریباً ۲۵۷۸ ہے جو لا میں سے گزرتا ہے پس ۵ لا + م - ۲۵ کی کم سے کم جبر یہ قیمت - ۲۵۷۸ ہے۔

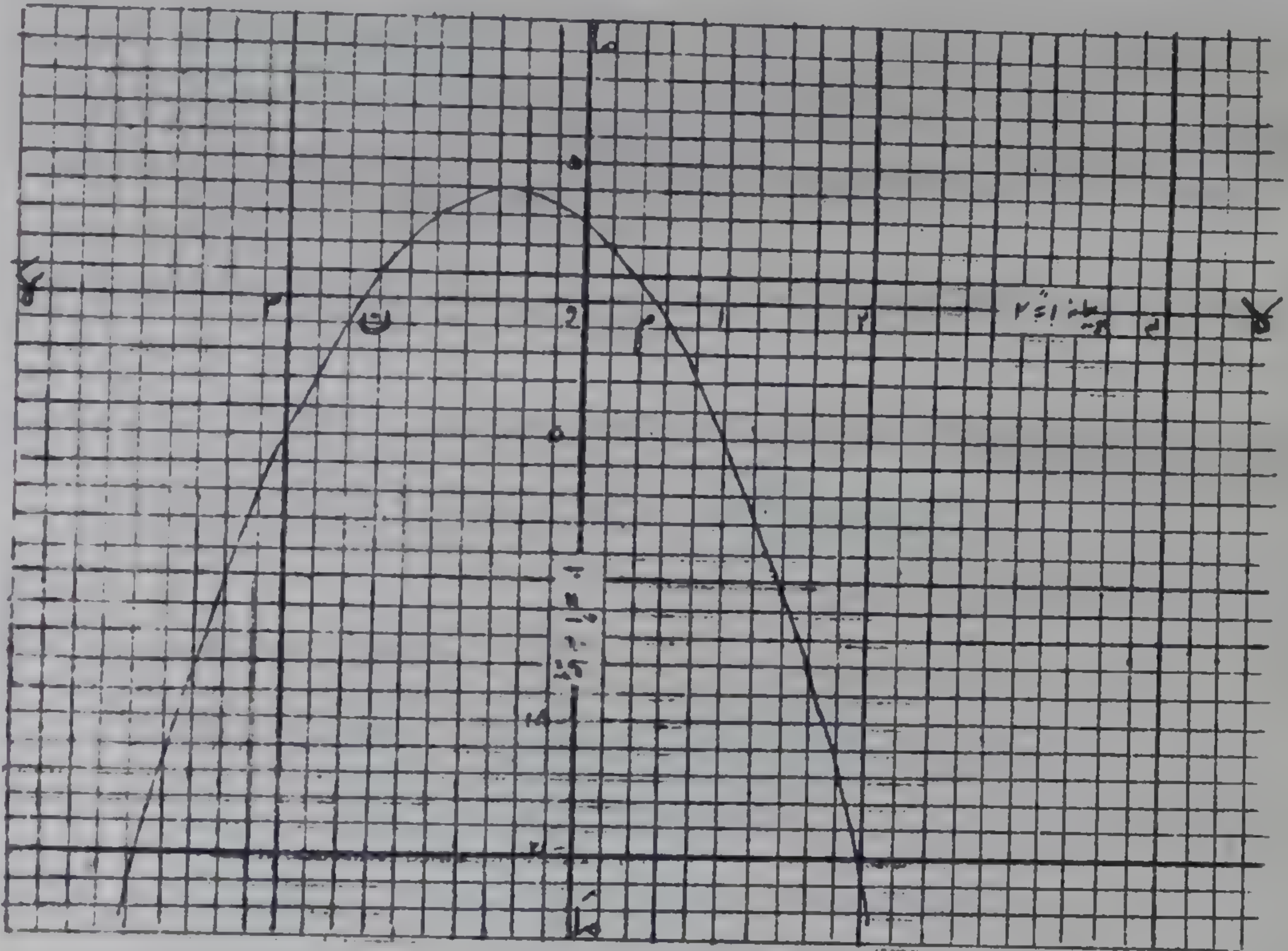
$$\text{مثال } م - ۳ = لا - ۳ = لا - ۳ \text{ کی ترسیم بناؤ۔}$$

اس کی مدد سے م لا + م - ۳ = کی اصلیں معلوم کرو،

نیز ثابت کرو کہ جگہ م - ۳ - لا - ۳ لا مثبت ہے لا کی ان تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جو ۵۷۰ اور - ۵۷۱ کے درمیان واقع ہوں لیکن لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے یہ منفی ہے، مزید برآں م - ۳ - لا - ۳ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

۲۵۰ -	۲ -	۱۵۰ -	۱ -	۵۰ -	۲	۱۵	۱	۵	۰ = ۱
۱۳	۱۱	۹	۷	۵	۵ -	۳ -	۱ -	۱	۳ = ۱۳ - ۳
۲۵ -	۱۶ -	۹ -	۴ -	۱ -	۱۶ -	۹ -	۴ -	۱ -	۳ = ۲۵ -
۱۲ -	۵ -	۰	۳	۴	۲۱ -	۱۲ -	۵ -	۰	۳ = ۱۲



لا کی قیمتوں کو محور لا پر ناپو ، پیمانہ $x = 1$
 اور لا کی قیمتوں کو محور ما پر ناپو ، پیمانہ $y = 1$
 جدول بالا کے نقاط کو مرسم کرنے سے اوپر کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔
 مساوات $x^2 - 3x - 3 = 0$ کی اصلیں لا کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لئے ما

یعنی ۳-۳-۳ لا-۳ لا^۲ صفر کے مساوی ہے، اور یہ صرف نقاط ۳ اور ۱ پر واقع ہوتا ہے جہاں ترسیم محور لا کو قطع کرتی ہے، پس مساوات کی مطلوبہ اصلیں ۵ اور ۵-۱ ہیں۔

اب نقاط ہم اور ن کے درمیان ترسیم کا جو حصہ ہے وہ محور لا کے اوپر واقع ہے، پس ما یعنی ۳۰ - ۳۰ - ۳۰ لا مثبت رہتا ہے جب تک کہ لا کی قیمت ۵۰ اور - ۵۰ کے درمیان واقع ہوتی ہے، نیز ظاہر ہے کہ لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے ۳۰ - ۳۰ - ۳۰ لا منفی ہے۔

۳-۴-۵ کی بڑی سے بڑی قیمت ترسیم کے سب سے بڑے معین ۴
 کے مساوی ہے، جبر یہ طریق پر اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں، ۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹

$$= 1 + 3 - (4 + 5 + 6) + (7 + 8 + 9) - 10 + 11 - (12 + 13 + 14) + (15 + 16 + 17) - 18 + 19 - (20 + 21 + 22) + (23 + 24 + 25) - 26 + 27 - (28 + 29 + 30) + (31 + 32 + 33) - 34 + 35 - (36 + 37 + 38) + (39 + 40 + 41) - 42 + 43 - (44 + 45 + 46) + (47 + 48 + 49) - 50 + 51 - (52 + 53 + 54) + (55 + 56 + 57) - 58 + 59 - (60 + 61 + 62) + (63 + 64 + 65) - 66 + 67 - (68 + 69 + 70) + (71 + 72 + 73) - 74 + 75 - (76 + 77 + 78) + (79 + 80 + 81) - 82 + 83 - (84 + 85 + 86) + (87 + 88 + 89) - 90 + 91 - (92 + 93 + 94) + (95 + 96 + 97) - 98 + 99 - (100 + 101 + 102) + (103 + 104 + 105) - 106 + 107 - (108 + 109 + 110) + (111 + 112 + 113) - 114 + 115 - (116 + 117 + 118) + (119 + 120 + 121) - 122 + 123 - (124 + 125 + 126) + (127 + 128 + 129) - 130 + 131 - (132 + 133 + 134) + (135 + 136 + 137) - 138 + 139 - (140 + 141 + 142) + (143 + 144 + 145) - 146 + 147 - (148 + 149 + 150) + (151 + 152 + 153) - 154 + 155 - (156 + 157 + 158) + (159 + 160 + 161) - 162 + 163 - (164 + 165 + 166) + (167 + 168 + 169) - 170 + 171 - (172 + 173 + 174) + (175 + 176 + 177) - 178 + 179 - (180 + 181 + 182) + (183 + 184 + 185) - 186 + 187 - (188 + 189 + 190) + (191 + 192 + 193) - 194 + 195 - (196 + 197 + 198) + (199 + 200 + 201) - 202 + 203 - (204 + 205 + 206) + (207 + 208 + 209) - 210 + 211 - (212 + 213 + 214) + (215 + 216 + 217) - 218 + 219 - (220 + 221 + 222) + (223 + 224 + 225) - 226 + 227 - (228 + 229 + 230) + (231 + 232 + 233) - 234 + 235 - (236 + 237 + 238) + (239 + 240 + 241) - 242 + 243 - (244 + 245 + 246) + (247 + 248 + 249) - 250 + 251 - (252 + 253 + 254) + (255 + 256 + 257) - 258 + 259 - (260 + 261 + 262) + (263 + 264 + 265) - 266 + 267 - (268 + 269 + 270) + (271 + 272 + 273) - 274 + 275 - (276 + 277 + 278) + (279 + 280 + 281) - 282 + 283 - (284 + 285 + 286) + (287 + 288 + 289) - 290 + 291 - (292 + 293 + 294) + (295 + 296 + 297) - 298 + 299 - (300 + 301 + 302) + (303 + 304 + 305) - 306 + 307 - (308 + 309 + 310) + (311 + 312 + 313) - 314 + 315 - (316 + 317 + 318) + (319 + 320 + 321) - 322 + 323 - (324 + 325 + 326) + (327 + 328 + 329) - 330 + 331 - (332 + 333 + 334) + (335 + 336 + 337) - 338 + 339 - (340 + 341 + 342) + (343 + 344 + 345) - 346 + 347 - (348 + 349 + 350) + (351 + 352 + 353) - 354 + 355 - (356 + 357 + 358) + (359 + 360 + 361) - 362 + 363 - (364 + 365 + 366) + (367 + 368 + 369) - 370 + 371 - (372 + 373 + 374) + (375 + 376 + 377) - 378 + 379 - (380 + 381 + 382) + (383 + 384 + 385) - 386 + 387 - (388 + 389 + 390) + (391 + 392 + 393) - 394 + 395 - (396 + 397 + 398) + (399 + 400 + 401) - 402 + 403 - (404 + 405 + 406) + (407 + 408 + 409) - 410 + 411 - (412 + 413 + 414) + (415 + 416 + 417) - 418 + 419 - (420 + 421 + 422) + (423 + 424 + 425) - 426 + 427 - (428 + 429 + 430) + (431 + 432 + 433) - 434 + 435 - (436 + 437 + 438) + (439 + 440 + 441) - 442 + 443 - (444 + 445 + 446) + (447 + 448 + 449) - 450 + 451 - (452 + 453 + 454) + (455 + 456 + 457) - 458 + 459 - (460 + 461 + 462) + (463 + 464 + 465) - 466 + 467 - (468 + 469 + 470) + (471 + 472 + 473) - 474 + 475 - (476 + 477 + 478) + (479 + 480 + 481) - 482 + 483 - (484 + 485 + 486) + (487 + 488 + 489) - 490 + 491 - (492 + 493 + 494) + (495 + 496 + 497) - 498 + 499 - (500 + 501 + 502) + (503 + 504 + 505) - 506 + 507 - (508 + 509 + 510) + (511 + 512 + 513) - 514 + 515 - (516 + 517 + 518) + (519 + 520 + 521) - 522 + 523 - (524 + 525 + 526) + (527 + 528 + 529) - 530 + 531 - (532 + 533 + 534) + (535 + 536 + 537) - 538 + 539 - (540 + 541 + 542) + (543 + 544 + 545) - 546 + 547 - (548 + 549 + 550) + (551 + 552 + 553) - 554 + 555 - (556 + 557 + 558) + (559 + 560 + 561) - 562 + 563 - (564 + 565 + 566) + (567 + 568 + 569) - 570 + 571 - (572 + 573 + 574) + (575 + 576 + 577) - 578 + 579 - (580 + 581 + 582) + (583 + 584 + 585) - 586 + 587 - (588 + 589 + 590) + (591 + 592 + 593) - 594 + 595 - (596 + 597 + 598) + (599 + 600 + 601) - 602 + 603 - (604 + 605 + 606) + (607 + 608 + 609) - 610 + 611 - (612 + 613 + 614) + (615 + 616 + 617) - 618 + 619 - (620 + 621 + 622) + (623 + 624 + 625) - 626 + 627 - (628 + 629 + 630) + (631 + 632 + 633) - 634 + 635 - (636 + 637 + 638) + (639 + 640 + 641) - 642 + 643 - (644 + 645 + 646) + (647 + 648 + 649) - 650 + 651 - (652 + 653 + 654) + (655 + 656 + 657) - 658 + 659 - (660 + 661 + 662) + (663 + 664 + 665) - 666 + 667 - (668 + 669 + 670) + (671 + 672 + 673) - 674 + 675 - (676 + 677 + 678) + (679 + 680 + 681) - 682 + 683 - (684 + 685 + 686) + (687 + 688 + 689) - 690 + 691 - (692 + 693 + 694) + (695 + 696 + 697) - 698 + 699 - (700 + 701 + 702) + (703 + 704 + 705) - 706 + 707 - (708 + 709 + 710) + (711 + 712 + 713) - 714 + 715 - (716 + 717 + 718) + (719 + 720 + 721) - 722 + 723 - (724 + 725 + 726) + (727 + 728 + 729) - 730 + 731 - (732 + 733 + 734) + (735 + 736 + 737) - 738 + 739 - (740 + 741 + 742) + (743 + 744 + 745) - 746 + 747 - (748 + 749 + 750) + (751 + 752 + 753) - 754 + 755 - (756 + 757 + 758) + (759 + 760 + 761) - 762 + 763 - (764 + 765 + 766) + (767 + 768 + 769) - 770 + 771 - (772 + 773 + 774) + (775 + 776 + 777) - 778 + 779 - (780 + 781 + 782) + (783 + 784 +$$

اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے $(1 + 2 \text{ لا})^2$ مثبت ہے سوائے
اُس صورت کے جبکہ $\text{لا} = -\frac{1}{2}$ اور جب $\text{لا} = -\frac{1}{2}$ تو $(1 + 2 \text{ لا})^2 = 0$ اور اس

صورت میں جلد کی قیمت ہم کے مساوی ہے جو اس کی قیمت اعظم ہے۔

مندرجہ بالا تین مثالوں میں ہم نے تفاعل لاء-ء لا + ۱۱
یا مساوات لاء-ء لا + ۱۱ (۱)

تفاعل { ۵ لا + م لا - ۲۵ } اور تفاعل { م لا - م لا - ۲ }
 مساوات ما = ۵ لا + م لا - ۲۵ (۲) یا مساوات ما = م لا - م لا - ۲ (۳)

کی ترسیمیں بنائیں۔ طالب علم غور سے دیکھے کہ تینوں صورتوں میں ترسیموں کی عام شکل اور بناوٹ ایک ہی ہے، اور یہ بالعموم درست ہے کہ

تفاعل ۱ لا + ب لا + ج

یا مساوات $1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

کی ترسیم بھی اسی شکل کی ہوگی، اس منحنی کو قطع مکانی (Parabola) یا صرف مکانی کہتے ہیں۔ ذیل میں ہم اس کے خواص پر مختصراً بحث کریں گے۔

ضروری۔ اس دفعہ میں ہم نے ایک مچھول مقدار کی مساوات درجہ دوم کو ترسیلی

طریق پر حل کیا، اس بات کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ یہ طریقہ بالکل عام ہے اور کسی درجہ کی مساوات کے حل کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے، ہم یہاں صرف درجہ سوم کی ایک مساوات کو تریسیمی طریق پر حل کرنے سے اس طریقہ کی مزید توضیح کریں گے۔

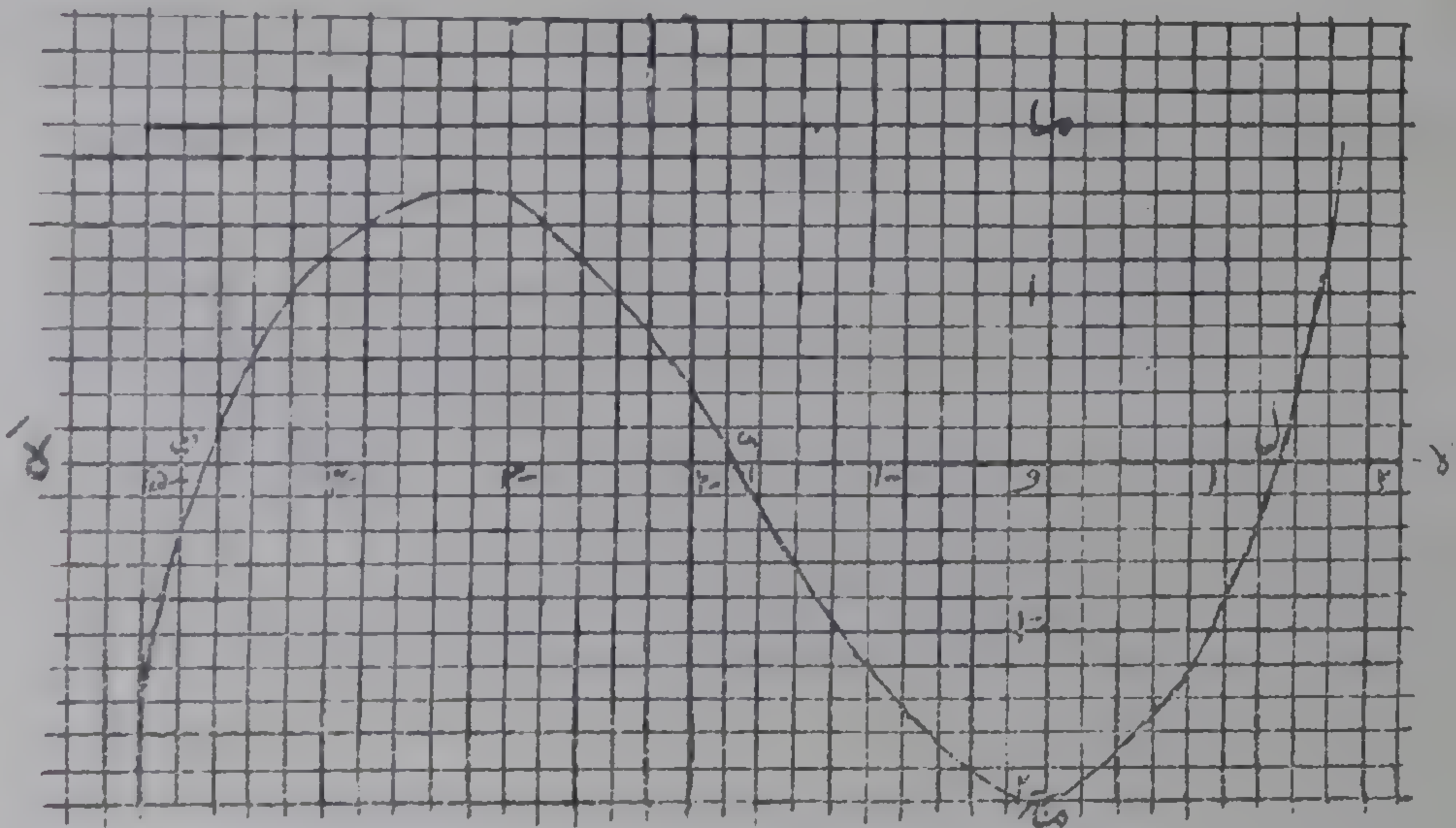
مثال - مساوات $\frac{1}{5}x^3 + 2x^2 - 15x - 12 = 0$ کی اصلیں تریسیمی طریق پر معلوم کرو۔

سہولت کی خاطر جدول ذیل مرتب کی گئی ہے۔

۲	۱۵۵	۱	۰	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	لا
۳	۲۵۲۵	۱	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	لا ^۲
۱۵۶	۵۶۶	۵۲	۰	۵۲-	۱۵۶-	۵۵۲-	۱۲۵۸-	۲۵-	$\frac{1}{5}لا^۳$
۳۵۶	۵۹	۵۸-	۲۰۰	۱۵۲-	۵۴	۱۵۶	۱۵۲	۲-	$\frac{1}{5}لا^۳ + ۲لا^۲ - ۲-$

نقاط (۲-، ۵-)، (۳-، ۱۵۲-) وغیرہ کو مرسم کرنے اور انکو ملانے سے ذیل کی تریسیم حاصل ہوتی ہے،

چونکہ تریسیم محور لا کو صرف تین نقاط ل، م، ن پر قطع کرتی ہے، اس لئے ان نقطوں کے لئے تقابل $\frac{1}{5}لا^۳ + ۲لا^۲ - ۲$ صفر کے مساوی ہے۔



پس ان نقاط کے فاصلے ول، وم، ون، مساوات کے مطلوبہ حل ہیں۔

$$\text{ول} = ۱۵۲۵، \text{وم} = ۱۶۸، \text{ون} = ۴۵۶$$

پس ایک مجہول مساوات درج سوم $\frac{1}{2} \text{لا}^3 + ۲ - \text{لا}^2$ کی تین اصلیں تریسیمی طریق سے ۱۵۲۵، ۱۶۸، ۴۵۶ معلوم ہوئیں۔

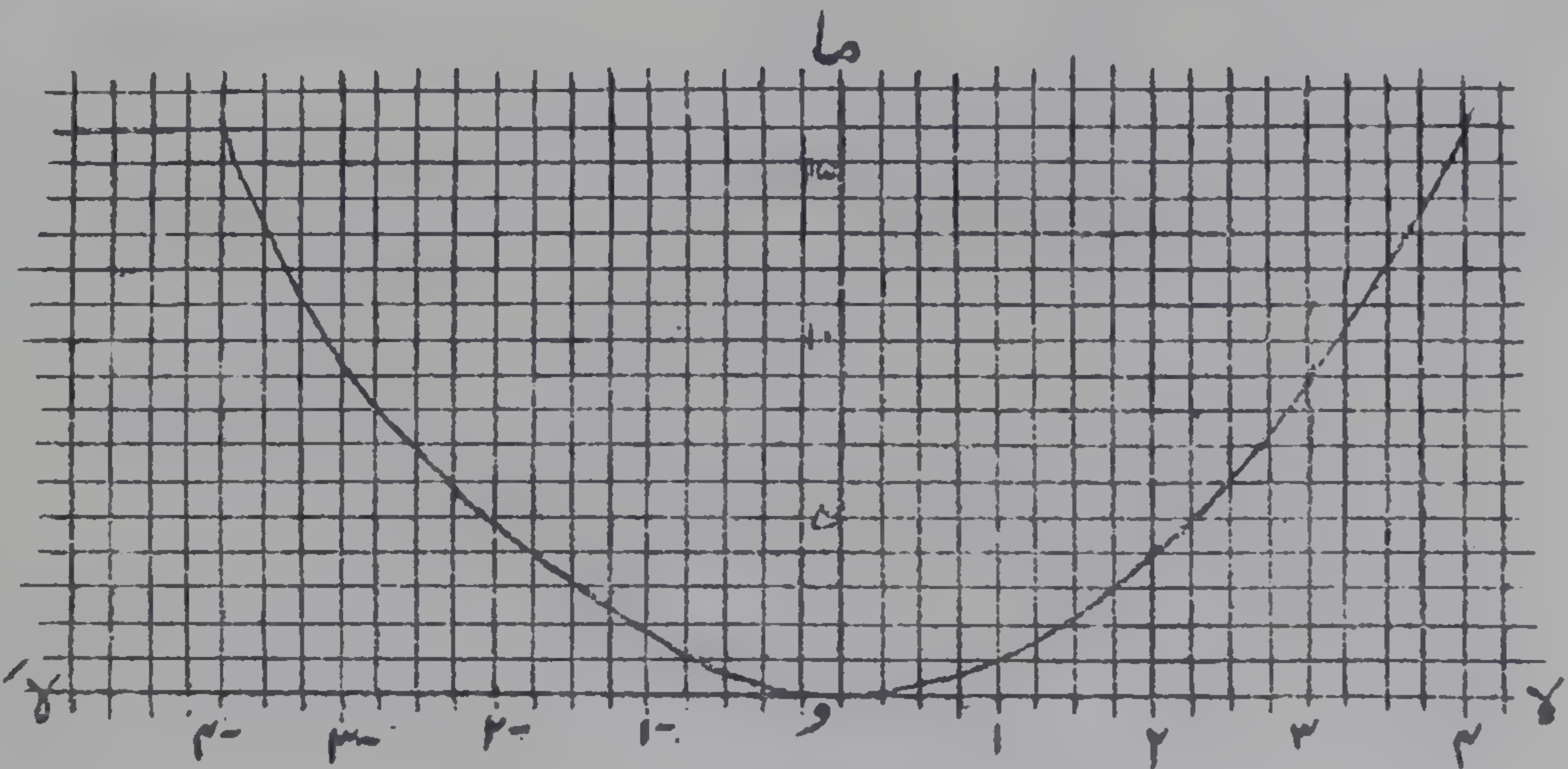
اوپر کے عمل سے ظاہر ہے کہ یہ طریقہ ایک مجہول کی کسی درجہ کی مساوات کے تقریبی حل معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے۔

۴۴- مثال ۱- $\text{ما} = \text{لا}^2$ کی تریسیم۔

یہ تریسیم نہایت ضروری اور دلچسپ ہے، اس لئے مناسب ہے کہ اسے موزوں پیمانہ پر نہایت احتیاط کے ساتھ مرتسم کیا جائے۔

طالب علم جانتا ہے کہ مساوات $\text{ما} = \text{لا}^2$ کی تریسیم وہی ہے جو قفا عمل لا^2 کی ہے، لاکھ مختلف عددی قیمتیں دینے سے لا^2 یعنی ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان سے جدول ذیل مرتب کرو۔

لا	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	لا
ما	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	ما



جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی کسی دو مساوی مگر مختلف علامت قیمتوں
(مثلاً $5 + 5$ اور -5) کے جواب میں $ما$ کی ایک ہی قیمت (25) ہے،
محور لا پر طول ناپنے کی اکائی فرض کر دو $1 = 5 + 5$ یعنی چار چھوٹے
حصے $= 1$ اور محور $ما$ پر $10 = 1$

نقاط $(14, 2)$ $(9, 3)$ وغیرہ وغیرہ کو مرتسم کرنے اور ملانے سے $ما = لا$
کی ترسیم حاصل ہوتی ہے ملاحظہ ہو شکل بالا، یہ منحنی قطع مکانی کہلاتا ہے، اس
کے متعلق دو تین باتیں خاص طور پر غور طلب ہیں۔

(۱) طالب علم دیکھے کہ منحنی بالتمام ربعات اول اور دوم میں واقع ہے،
کیونکہ $ما = لا$ میں لا کو ہم خواہ کوئی مثبت یا منفی قیمت دیں $لا$ یعنی $ما$ کبھی منفی
نہیں ہوگا اور اس لئے منحنی کا کوئی اور نقطہ محور $لا$ سے نیچے واقع نہیں ہوگا،
لیکن اگر مساوات $ما = -لا$ ہوتی تو لا کی تمام قیمتوں کے لئے $ما$ منفی ہوتا یعنی
منحنی بالتمام محور $لا$ سے نیچے واقع ہوتا۔

ظاہر ہے کہ مساواتوں $ما = لا$ کے منحنی بالکل ایک جیسے ہیں صرف فرق یہ ہے

کہ پہلا منحنی محور $لا$ کے اوپر واقع ہے اور اس کا قعر اوپر کی طرف ہے (دیکھو شکل بالا)
اور دوسرا بالتمام محور $لا$ سے نیچے واقع ہے اور اس کا انحناء نیچے کی طرف ہے۔
اسی شکل میں اسی بیان پر طالب علم خود $ما = -لا$ کی ترسیم بنا کر ان امور
کی تصدیق کرے اور دیکھے کہ محور $لا$ دونوں صورتوں میں ہر دو منحنیات کا تماس ہے۔

(۲) مساوات $ما = لا$ اس طرح لکھی جاسکتی ہے $لا = 5 + 5$ یا

اس سے ظاہر ہے کہ $ما$ کی کسی خاص قیمت کے لئے $لا$ کی دو قیمتیں ہیں جو
مقدار میں مساوی لیکن علامت میں مختلف ہیں، اس لئے ترسیم بلحاظ محور $ما$
کے متشاکل ہے، پس اگر ربع اول میں ہم چند نقطے مرتسم کر کے منحنی کی شکل
معلوم کر سکیں تو ربع دوم میں بغیر اور نقطے فی الحقیقت مرتسم کرنے کے منحنی کی
شکل معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ محور $ما$ میں ایک طرف کا حصہ دوسری طرف
کے حصہ کا عکس ہے۔

(۳) اگر لا کو تعداداً بڑھایا جائے تو لا یعنی ما بھی بڑی سرعت سے بڑھتا ہے اور چونکہ ہم لا کو بڑی سے بڑی مثبت یا منفی قیمت دے سکتے ہیں اس سے معلوم ہوا کہ منحنی مذکور رجعات اول اور دوم میں لا انتہا فاصلہ تک باہر کی طرف اوپر کو پھیلتا جاتا ہے۔

مثال ۳۔ $ما = لا$ کی تریسیم

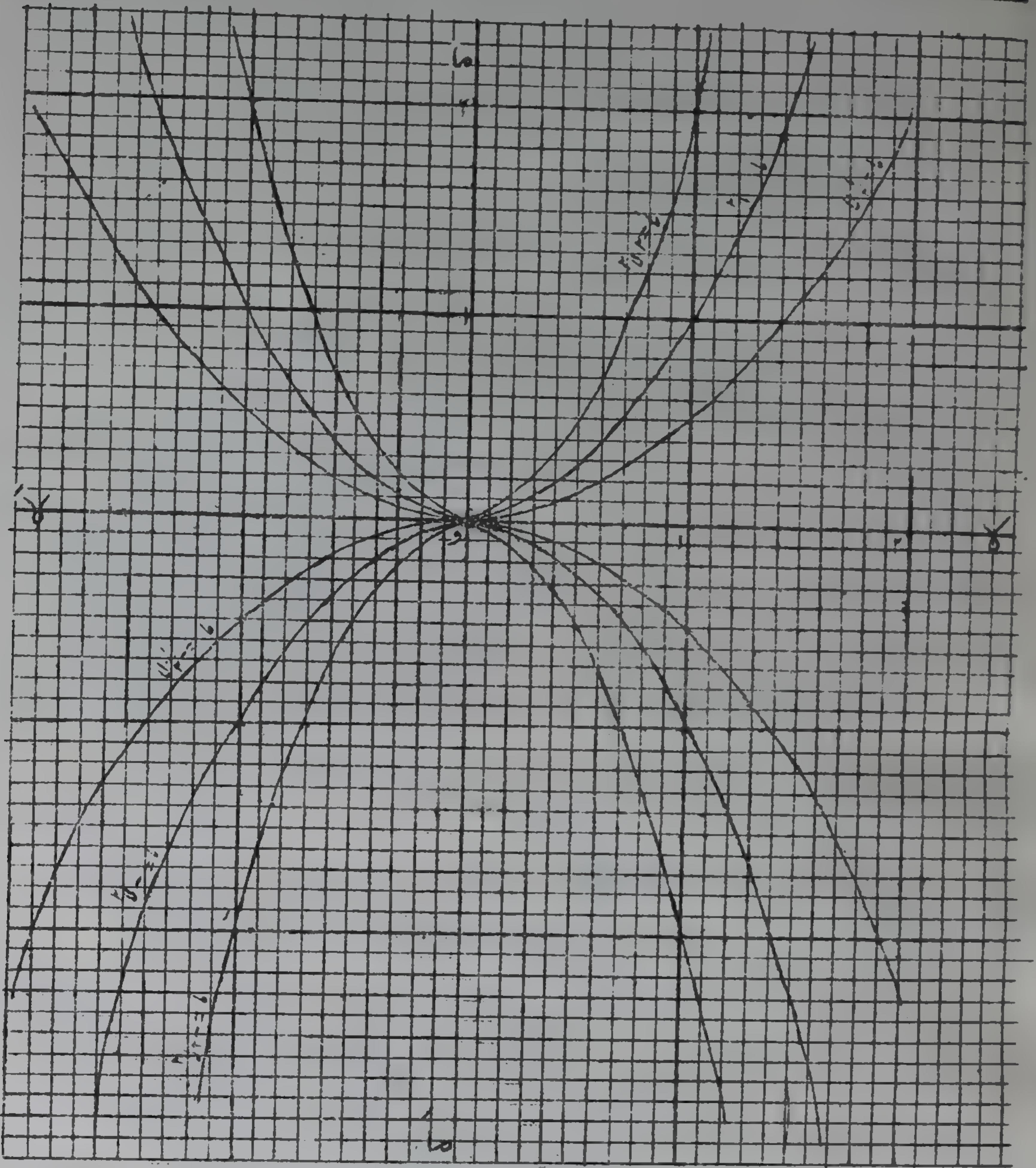
اس مساوات $ما = لا$ میں لا کو کوئی عددی قیمتیں ۲، ۳، ۴، ۵ وغیرہ دینے سے کئی مساواتیں حاصل ہو سکتی ہیں $ما = ۲$ ، $ما = ۳$ ، $ما = ۴$ ، $ما = ۵$ وغیرہ ایسی ہر ایک مساوات کی تریسیم ہم بعینہ مثال ۱ کے عمل کے موافق بنا سکتے ہیں یعنی پہلے ہم لا کی کوئی مناسب قیمتیں منتخب کریں اور اس کے بعد ان قیمتوں کے جواب میں ما کی قیمتیں معلوم کریں، لا، ما کی ان متناظر قیمتوں کو مرتسم کرنے سے تریسیم حاصل ہو سکتی ہے۔ لیکن ان مساواتوں کی تریسیمیں ہم ایک اور مفید اور مختصر طریقہ سے بناتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ لا مثبت ہے اور ۲ کے مساوی ہے، اس صورت میں مساوات معروضہ $ما = لا$ ہوگی۔

سب سے پہلے طالب علم $ما = لا$ کی تریسیم بنائے (دیکھو مثال ۱) لا کی ایک ہی قیمت کے لئے $ما = لا$ کی تریسیم کا معین لا کی تریسیم کے معین سے دو چند ہے، پس اگر $ما = لا$ کے ہر ایک معین کو اوپر کی طرف اتنا خارج کیا جائے کہ نئے معین کا طول پہلے سے دو چند ہو جائے اور ان نئے معینوں کے سروں کو ایک مسلسل منحنی سے ملایا جائے تو یہ منحنی مساوات $ما = لا$ یا تفاعل $ما = لا$ کی تریسیم ہوگا۔

اس طرح سے ہم تفاعل $ما = لا$ ، $\frac{1}{۲} لا$ کی تریسیم کے

ہر معین کو بالترتیب گھٹا یا آدھا کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل بالا میں محور لا کے اوپر جو منحنی ہیں وہ تقاطعیں لا^۱، لا^۲، لا^۳ کی ترسیبیں ہیں ان میں سے ہر ایک قطع مکانی ہے، پس اگر مساوات $ما = و$ لا یا تقاطع لا^۱ میں و کا سر مثبت ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مکانی بالتمام محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے اور جیسے یہ سر ابتدا و بڑھتا ہے یہ مکانی محور ما کے گرد تنگ ہوتا جاتا ہے مثلاً لا^۲ کی ترسیم لا^۱ کی ترسیم کے بالکل اندر واقع ہوتی ہے اور لا^۳ کی

ترسیم $\frac{1}{2}$ لا کی ترسیم کے اندر ہے۔

(۲) فرض کرو کہ لا منفی ہے، پس اگر $1 = -$ تو مساوات مفروضہ ہوگی

$ما = -$ لا، اس مساوات کا $ما = لا$ کے ساتھ مقابلہ کرو۔ ہم دیکھتے ہیں

کہ لا کی کسی قیمت کے لئے ما کی جو قیمتیں مساواتوں $ما = لا$ سے حاصل ہوتی

ہیں وہ مقدار میں مساوی ہیں لیکن علامت میں مختلف ہیں۔

اس لئے $ما = -$ لا کی ترسیم کے معین $ما = لا$ کے معینوں کے مساوی ہونگے لیکن محور لا سے نیچے کی طرف کھینچے جائیں گے، پس $ما = -$ لا کی ترسیم محور لا میں $ما = لا$ کی ترسیم کا عکس ہے اور یہ اس طرح حاصل ہو سکتی ہے، $ما = لا$ کی ترسیم پر کوئی نقطہ لا اور محور لا کی دوسری جانب اتنے ہی عمودی فاصلہ پر ایک نقطہ معلوم کرو یعنی محور لا میں نقطہ کا عکس معلوم کرو۔ ایسے کئی نقطے معلوم ہو سکتے ہیں جنکو ملائے سے $ما = -$ لا کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

$ما = -$ لا (۱ = - ۲) کی ترسیم $ما = -$ لا کی ترسیم کے معینوں کو دگنا کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے یا اسے ہم $ما = لا$ کی ترسیم کا محور لا میں عکس لینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح $\frac{1}{2}$ لا، $۱ = -$ لا کی ترسیم بنائی جاسکتی ہیں۔

شکل بالا میں محور لا کے نیچے جو منحنی ہیں وہ $لا = ۱$ ، $لا = \frac{1}{2}$ کی ترسیمیں ہیں، ان میں سے ہر ایک قطع مکانی ہے اور چونکہ لا کا سر ہر صورت میں منفی ہے، اس لئے ہر ایک منحنی بالتمام محور لا سے نیچے واقع ہوتا ہے۔

بالعموم ترسیموں کو نقطہ مرتسم کر کے بنایا جاتا ہے لیکن طریق بالا سے یہ زیادہ واضح طور پر معلوم ہوتا ہے کہ لا کی مختلف مثبت قیمتوں کے لئے لا کی ترسیمیں عام شکل اور ترکیب میں $ما = لا$ کی ترسیم کی طرح ہیں اور لا کی منفی قیمتوں کے لئے $ما = -$ لا کی ترسیم کی مانند ہیں۔

$لا + ب$ کی ترسیم جہاں ب مثبت ہے لا کی ترسیم سے حاصل ہو سکتی ہے اگر موزوں ذکر کے ہر ایک معین کو بقدر ب اکائیوں کے اوپر کی طرف خارج کر دیا جائے، پس $لا + ب$ اور لا کی ترسیمیں بالکل مماثل ہیں صرف

و لا + ب کی ترسیم بلحاظ مقام کے ب اکائیاں مقابلہ اوپر واقع ہے۔ اسی طرح
و لا - ب کی ترسیم وہی ہے جو و لا کی صرف اول الذکر ب اکائیاں نیچے واقع ہے۔
مختصراً و لا کی ترسیم و کی مختلف عددی قیمتوں کے لئے قطع مکانی ہے۔ اگر و
مثبت ہو تو یہ ترسیم بالتمام محور لا سے اوپر واقع ہوتی ہے، اگر و منفی ہو تو یہ ترسیم
محور لا سے نیچے واقع ہوتی ہے۔ جیسے و تعداداً بڑھتا ہے یہ ترسیم محور صا کے گرد
زیادہ تنگ ہوتی جاتی ہے اور جیسے و گھٹتا ہے یہ ترسیم کشادہ ہوتی جاتی ہے۔
۴۵۔ درجہ دوم کی سب مساواتیں درجات ۴۴، ۴۳ کے عام ترسیمی
طریق سے حل ہو سکتی ہیں، لیکن اگر ایسی مساواتوں کو اس طریقہ سے حل
کیا جائے جو ہمزاد مساواتوں کے لئے استعمال کیا جاتا ہے تو عمل میں ذرا سہولت
ہوتی ہے۔

مساوات درجہ دوم و لا + ب لا + ج = ۰ (۱)

پر غور کرو۔

فرض کر دو کہ لا = ۱ (۲)

مساوات (۱) میں لا کے لئے ما مندرج کرنے سے

و لا + ب لا + ج = ۰ (۳)

پس اگر مساواتوں { (۲) کو ایک ساتھ بطور ہمزاد مساواتوں
(۳) و لا + ب لا + ج = ۰
کے ترکیبی طریق پر حل کیا جائے اور اس طرح لا کی قیمت یا قیمتیں معلوم کی جائیں
تو یہ قیمتیں مساوات (۱) کی اصلیں ہونگی۔

اب نظام و لا + ب لا + ج = ۰ کو ترکیبی طریق پر حل کرنے سے یہ

مراد ہے کہ ہم لا = ۱ اور لا + ب لا + ج = ۰ کی الگ الگ ترسیمیں ایک
ہی پانہ پر اور ایک ہی شکل میں بنائیں اور جہاں یہ ایک دوسرے کو قطع کرتی
ہوں ان نقاط کے نقطے یعنی لا کی قیمتیں معلوم کریں، یہ نقطے مساوات مفروضہ
و لا + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہونگی۔

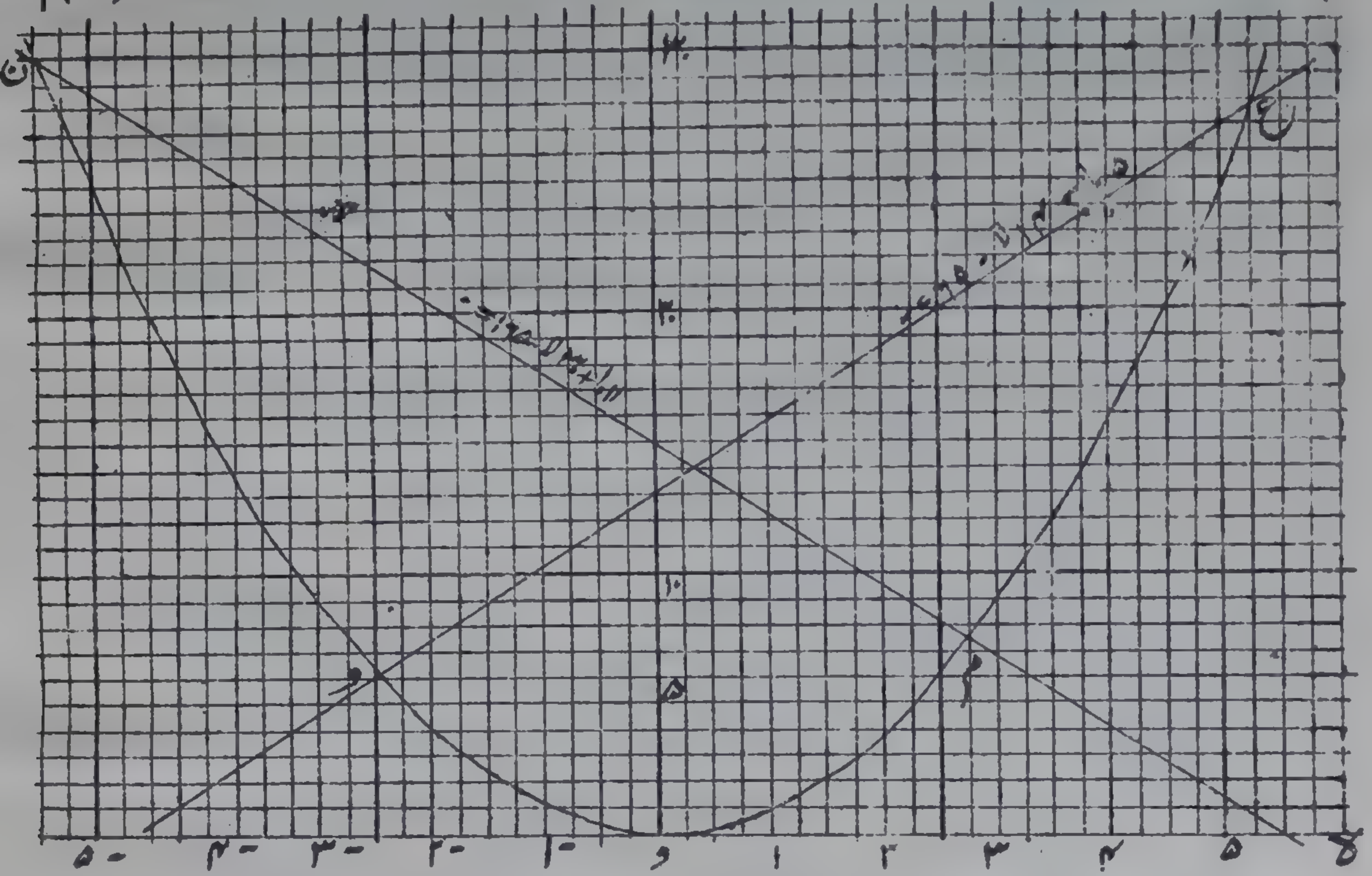
اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ ہر مساوات درجہ دوم کے حل کرنے میں $ما = لا$ کی وہی ترسیم ہمیشہ استعمال ہو سکتی ہے صرف ہر صورت میں ہمیں خطی مساوات $1 + ما + ب لا + ج = 0$ کی ترسیم بنانا پڑتی ہے جو ہم جانتے ہیں کہ متقابلہ باسانی بن سکتی ہے۔

ذیل کی مثالوں سے اس طریقہ کی بخوبی توضیح ہوگی۔

مثال ۱۔ مساوات $11 لا + ۳۰ لا - ۱۶۵ = 0$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $ما = لا$ (۲)

مفروضہ مساوات میں یہ مندرجہ کرنے سے $11 ما + ۳۰ لا - ۱۶۵ = 0$ (۳)



$ما = لا$ کی ترسیم حسب سابق (صفحہ ۴۴) بناؤ، بیجانہ محور لا پر $ا = ۵$ اور محور ما پر $ا = ۱۰$ ۔

اسی بیجانہ کے مطابق $11 ما + ۳۰ لا - ۱۶۵ = 0$ کی ترسیم بناؤ، اس میں

اگر $لا = ۱۵$ تو $ما = ۱۵$

اور اگر $ما = ۵$ تو $لا = ۵$

مثال ۲ - ۵ لا^۲ - ۱۳ لا - ۴۵ = کو حل کرو۔

تب ۵-۶-۱۳-لا-۶۵-۷۰ " " " " (۲)

(۱) کی ترسیم مثل میں موجود ہے
(۲) کی ترسیم پر دو نقطے (۱۰، ۱۳) اور (۵، ۲۷) واقع ہوتے ہیں، ان کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے (۲) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے جو مسکافی کو ع اور ط پر قطع کرتی ہے، پس ع اور ط کے فیصلے ناپنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $لا = ۵.۳$ یا۔ ۲.۵ جو مسادرات کی اصلیں ہیں۔

۴۶۔ دائرہ۔ مثال ۱۔ مساوات $2x^2 + 3x - 4 = 0$ کی ترسیم۔

یہ دو مقام پر مچھول لاء، ماکھی ایک مساوات درجہ دوم ہے، اس کو ہم اس طرح

بھی کہہ سکتے ہیں $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

اس مساوات کی ترمیم دیہی ہوگی جو تفاعل ۱۸-۳۶-۴ کی، لا، ما کی متناظر قیمتوں سے جدول ذیل مرتب کرو۔

6	4	2	2	.	1-	2-	0-	4-	6-	U
29	29	14	2	.	1	9	20	24	29	U
12-	.	20	22	24	20	26	11	.	12-	U-24
12-2	.	22-2	25-2	4±	25-2	25-2	25-2	.	12-2	U-24

ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی دو متناظر قیمتیں ہیں جو بقاداً ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں، مثلاً

اگر $لا = ۵$ تو $ما = ۳ + ۳$ یا $ما = ۳ - ۳$

اور اگر $لا = ۰$ تو $ما = ۶ + ۶$ یا $ما = ۶ - ۶$ وغیرہ

چونکہ

لا کی کسی

ایک قیمت

کے لئے

ما کی دو

قیمتیں ہیں

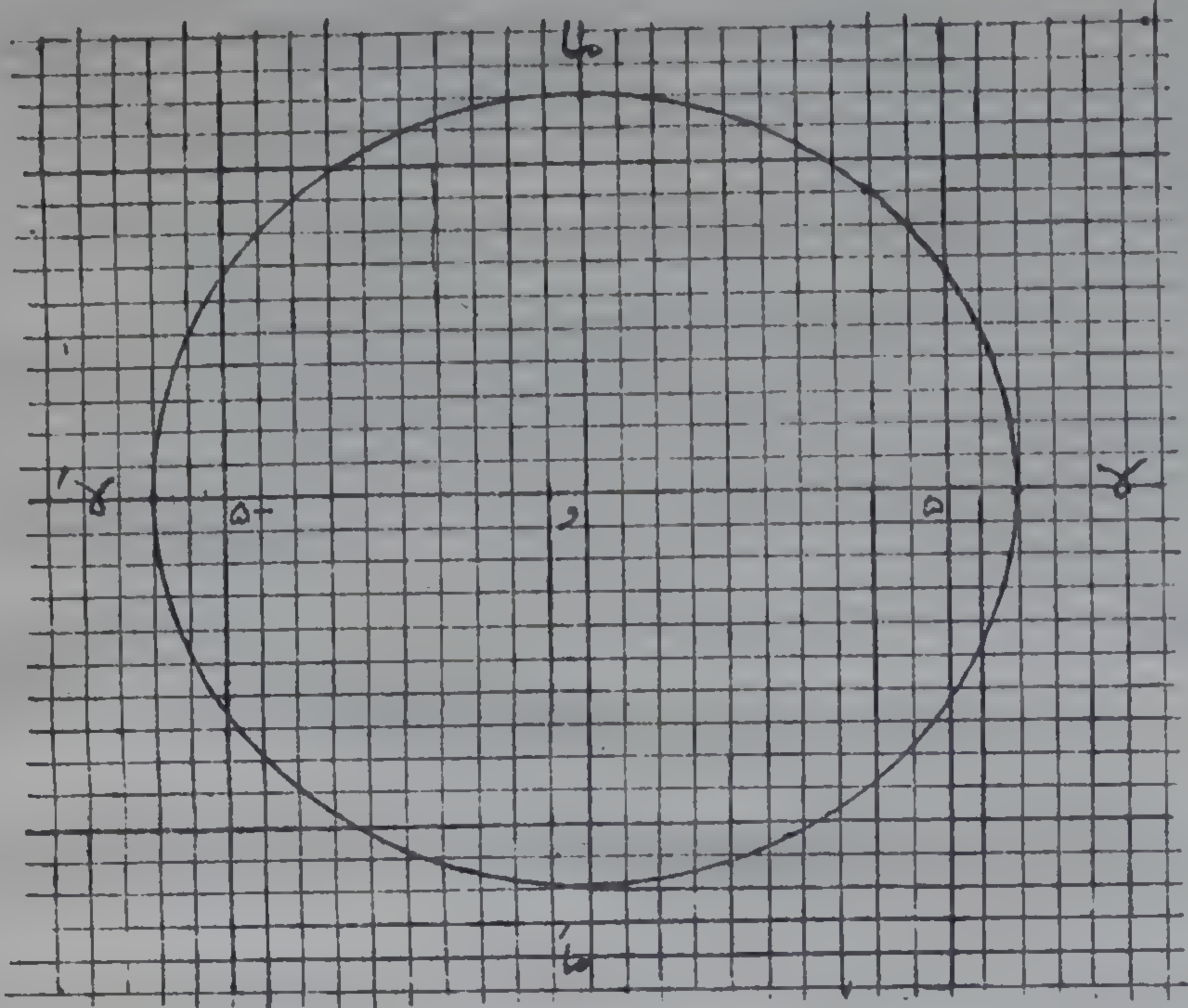
جو مساوی

اور مختلف

العلامت

ہیں اس

سے معلوم



ہوتا ہے کہ ترتیبی محور لا کے گرد متشاکل ہے۔

اسی طرح مساوات کو اس شکل $لا = ۴ - ۳$ یا $لا = ۴ + ۳$ میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ترتیبی محور ما کے گرد متشاکل ہے۔

نیز اگر $لا = ۷$ تو $ما = ۱۳ - ۶$ جو خیالی مقداریں ہیں، چونکہ ہم $ما = ۱۳$

کی قیمت حقیقی مقدار میں نہیں نکال سکتے، اس لئے لا کی قیمت $۷ + ۷$ یا $۷ - ۷$ کے

جواب میں ہیں ما کی حقیقی قیمتیں نہیں ملتیں جن کو مرتسم کرنے سے ہم منحنی پر ایک

نقطہ معلوم کر سکیں، فی الحقیقت اگر لا تعداداً $۷ \pm$ سے بڑا بھی ہو تو ما کی قیمتیں

خیالی ہونگی، اسی طرح اگر ما تعداداً $۷ \pm$ سے بڑا ہو تو لا کی قیمتیں خیالی ہونگی۔

پس معلوم ہوا کہ لا یا ما کی بڑی سے بڑی قیمت ۷ ہو سکتی ہے، اس لئے منحنی

بالتمام خطوط $لا = ۷ + ۷$ یا $لا = ۷ - ۷$

اور $ما = ما + ما = ما$ کے اندر واقع ہوتا ہے۔

اگر جدول کے سب نقاط کو حسب معمول مرتب کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ یہ ایک ایسے

دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز مبدا ہے اور جس کا نصف قطر ۶ ہے۔

دفعہ ۹ میں ہم نے دو نقاط کا باہمی فاصلہ ان نقاط کے محدودوں کی رقوم میں

معلوم کیا، مثلاً اگر دو نقاط $ا$ اور $ب$ کے محدود بالترتیب $(لا، ما)$ اور $(لام، مام)$

ہوں تو $ا$ اور $ب$ کے درمیانی فاصلہ کا مربع

$$اب^2 = (لا - لام)^2 + (ما - مام)^2$$

یعنی

$$اب^2 = (لا - لام)^2 + (ما - مام)^2$$

یعنی

اب فرض کر دو کہ اس مثال کے دائرہ کے محیط پر کوئی عام نقطہ $ن$ $(لا، ما)$ ہے

مبدا کے محدود $(۰، ۰)$ ہیں، اس لئے

$ون^2 = لا^2 + ما^2 = ۳۶$ کیونکہ $ن$ خواہ محیط پر کہیں واقع ہو اس کا فاصلہ مرکز

وسے ہمیشہ ۶ ہوگا،

اس لئے دائرہ مذکورہ کی مساوات $لا^2 + ما^2 = ۳۶$ ہے۔

مثال ۲ $لا^2 + ما^2 = ۸ - لا - ما = ۰$ کی ترتیب بناؤ

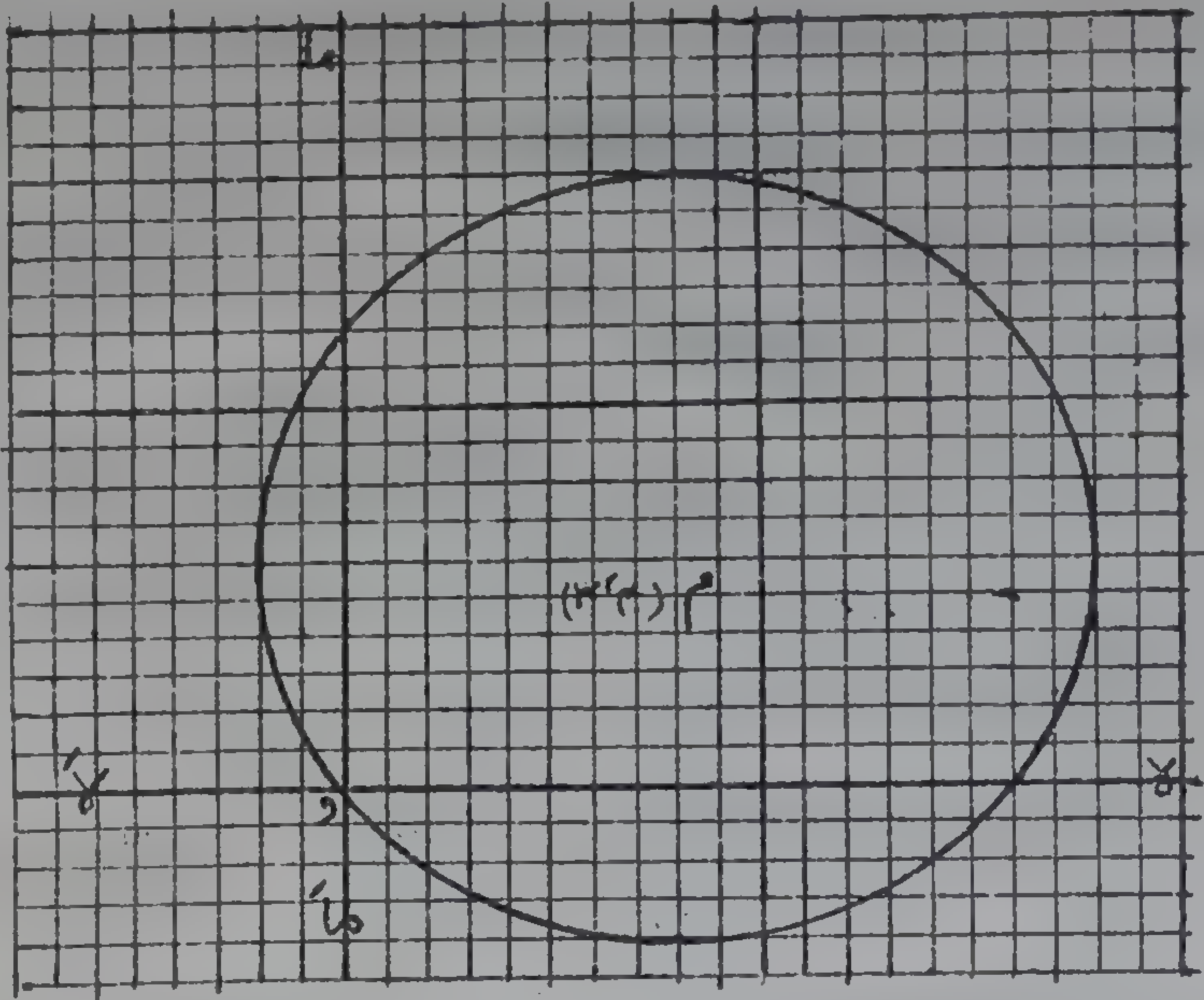
اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$(لا^2 + لا + ۱۶) + (ما^2 + ما + ۹) = ۲۵ \quad (\text{طرفین پر } ۲۵ \text{ زیادہ کرنے سے})$$

$$۲۵ = (لا + ۳)^2 + (ما + ۳)^2$$

یعنی

	لا	۰	۳	۵	۹	۱ -	$\frac{۱}{۲} -$
۳ - لا	۳ -	۰	۱	۵	۵	۵ -	$\frac{۳}{۲} -$
$۲(۳ - لا)$	۱۶	۰	۱	۲۵	۲۵	۲۵	$\frac{۲۰}{۲} -$
$۲(۳ - ما)$	۹	۲۵	۲۴	۰	۰	۰	$\frac{۲۴}{۲} -$
۳ - ما	۳ ±	۵ ±	۴۵ ±	۰	۰	۰	$\frac{۲}{۲} ±$
۶	۶ یا ۰	۲ - یا ۸	۱۵ یا ۷۵	۳	۳	۳	$\frac{۵}{۲} یا \frac{۱}{۲}$



اوپر کے دو نقاط
کو مرسم کرنے
سے ہم دیکھتے
ہیں کہ یہ ایک
دائرہ کے محیط
پر واقع ہوتے
ہیں جس کا مرکز
(۳، ۳) ہے اور
نصف قطر ۲.۵
مبدأ

بھی اس دائرہ کے محیط پر واقع ہے۔ یہ ہم ابتدا میں ہی مساوات سے دیکھ سکتے
تھے کیونکہ مبدأ کے محدود (۰، ۱۰) مساوات مفروضہ کو پورا کرتے ہیں۔

مساوات کی شکل $(۳ - لا)^2 + (۳ - ما)^2 = ۲۵$ سے ظاہر ہے (دیکھو مثال ۱)
کہ یہ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز نقطہ (۳، ۳) ہے اور جس کا نصف قطر ۲.۵ ہے۔
۱۱۔ اب ہم درجہ دوم کی ہزار مساواتوں کو ترتیبی طریق پر حل کرنے میں
ایک دو سادہ مثالیں درج کرتے ہیں، ترتیبی طریق پر سب ہزار مساواتیں
قریب قریب ایک ہی طرح سے حل ہوتی ہیں۔

ان مساواتوں کی ہم الگ الگ ترتیبیں ایک ہی شکل میں اور ایک ہی
پیمانہ پر بناتے ہیں اور ان کے نقاط تقاطع کے محدود معلوم کرتے ہیں۔
مثال ۱۔ ذیل کی ہزار مساواتوں کو ترتیبی طریق پر حل کرو۔

$$لا + ما = ۲۵ \quad (۱)$$

$$لا - ما = ۱ \quad (۲)$$

ان مساواتوں کو اس طرح لکھو

$$لا = ۲۵ - ما \quad (۱)$$

$$ما = لا - ۱ \quad (۲)$$

اب مطلوب یہ ہے کہ ہم لا، ما کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں پس ہمیں $ما = ۲۵ - لا$ اور $ما = لا$ کی ترسیمیں بنا کر ان کے تقاطع نقطہ معلوم کرنے چاہئیں۔

کی ترسیم $ما = ۲۵ - لا$

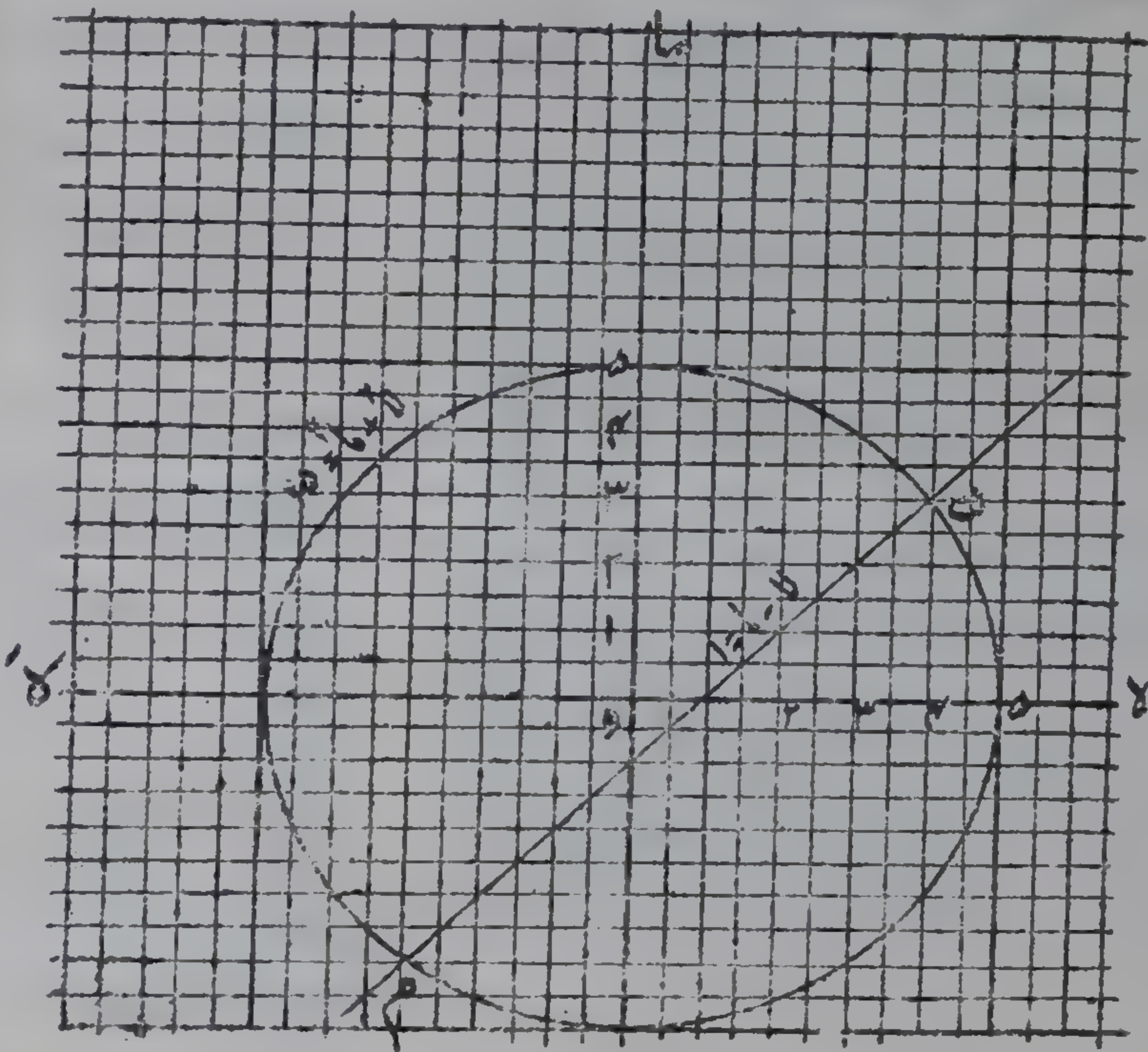
	۲ -	۳ -	۰	۳	۴	۵	لا
	۳ ±	۴ ±	۵ ±	۴ ±	۳ ±	۰	ما

ان نقاط کو مرتسم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $ما = ۲۵ - لا$ کی ترسیم ایک محیط دائرہ ہے جس کا مرکز مبدا ہے اور نصف قطر ۵۔

اب اس شکل میں اسی بیجا نہ پر ہم $ما = لا$ کی ترسیم بناتے ہیں

$ما = لا$ کی ترسیم

۳ -	۲ -	۱ -	۰	۱	۲	۳	لا
۴ -	۳ -	۲ -	۱ -	۰	۱	۲	ما



ان نقاط کو مرتسم کرنے سے $ما = لا$ کی ترسیم بنائی گئی ہے جو ایک مستقیم خط ہے۔ دائرہ اور یہ خط مستقیم ایک دوسرے کو نقاط ہم اور ن پر قطع کرتے ہیں جن کے محدد بالترتیب (۳، ۴) اور (۴، ۳) ہیں اور چونکہ یہ نقطے دونوں

ترسیموں پر اسلئے یہ دونوں مساواتوں کو پورا کرتے ہیں۔

تصدیق $\begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 2 \end{cases}$ کو مساواتوں میں مندرج کرنے سے

$$(1) \quad \lambda^2 + \mu^2 = 3^2 + 2^2 = 13 = 25$$

$$\lambda - \mu = 3 - 2 = 1$$

$$(2) \quad \text{اگر } \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 2 \end{cases} \text{ تو } \lambda^2 + \mu^2 = 3^2 + 2^2 = 13 = 25$$

$$\lambda - \mu = 3 - 2 = 1$$

پس یہ حل درست ہیں۔

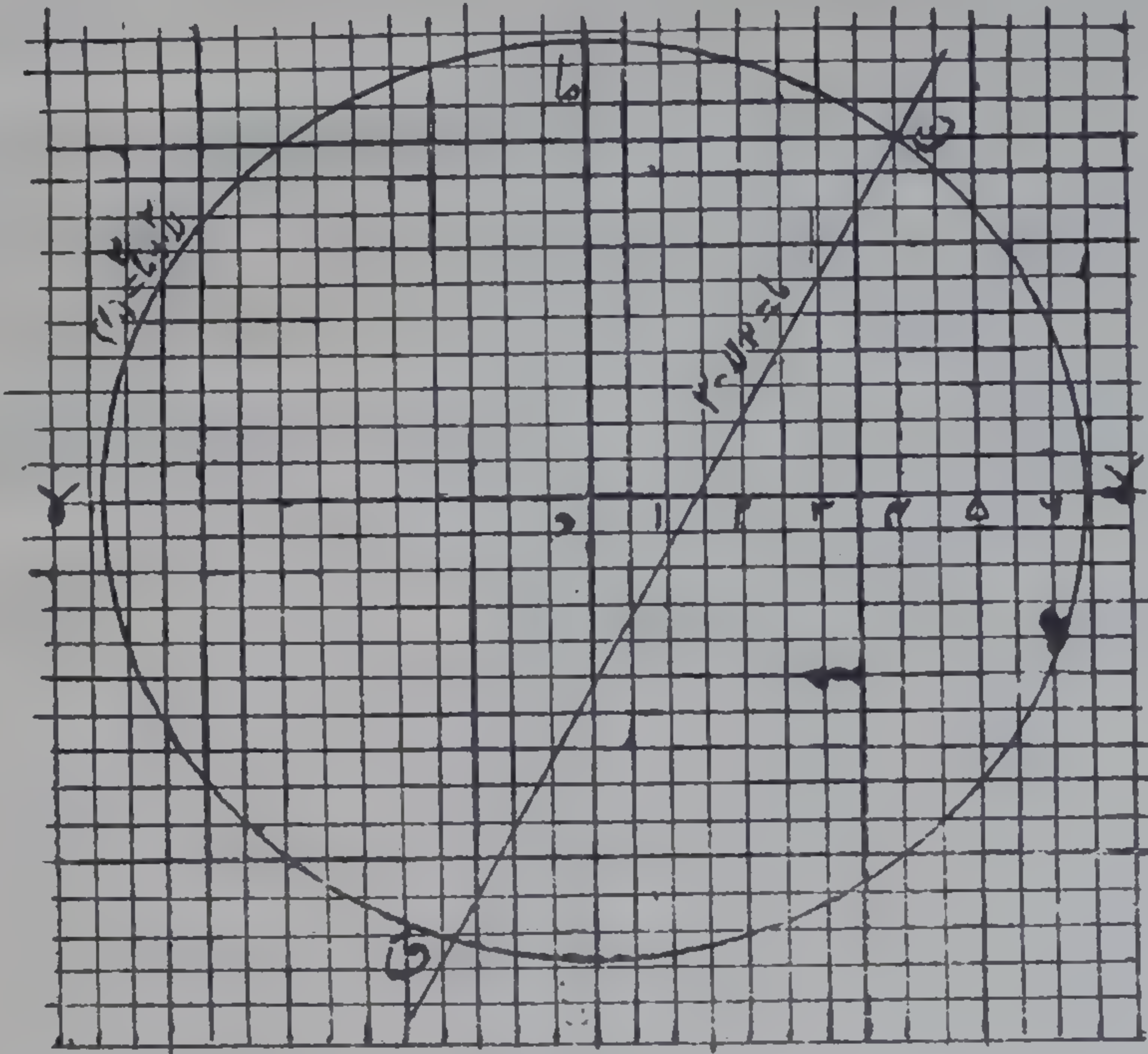
مثال ۲۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو ترتیبی طریق پر حل کرو۔

$$\lambda^2 + \mu^2 = 13 \quad (1) \quad \text{اور} \quad \lambda - \mu = 1 \quad (2)$$

(۱) کی ترسیم ایک دائرہ کا محیط ہے جس کا مرکز مبدا ہے اور نصف قطر $\lambda = 3$ اور $\mu = 2$ اور ہم دیکھتے ہیں کہ $\lambda = 3$ اور $\mu = 2$ نقطہ ن مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے، اس لئے یہ دائرہ مذکور کے محیط پر واقع ہے،

پس اگر ہم مبدا کو مرکز اور ون کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں تو اس کا محیط ترسیم مطلوب ہوگی۔

(۲) کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے جو محور کو نقطہ (۵، ۰) اور (۰، ۳) پر قطع کرتی ہے، یہ خط دائرہ کو نقاط ن اور ق پر قطع کرتا ہے



اور ان نقطوں کے محدود بالترتیب (۴، ۵) اور (۱۶، ۱۷) (۲۳، ۲۴) ہیں، پس ہمزاد مساواتوں (۱۱) اور (۱۲) کے حل حسب ذیل ہیں

لا = ۴، ما = ۵ اور لا = ۱۶، ما = ۱۷

۱۱۔ مثلہ نمبری

۱۔ ہر صورت میں مناسب پیمانہ کا انتخاب کر کے

لا = ۱۶، لا = ۵، لا = ۴ کی ترتیبیں بناؤ اور دکھاؤ کہ سب ترتیبیں مبداء پر محور لا کو مس کرتی ہیں۔

۲۔ لا = ۴ اور لا = ۵ کی ترتیبیں بناؤ اور دکھاؤ کہ ان کا صرف ایک مشترک وتر ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

$$۳۔ (۱) لا = ۴، (۲) لا = ۵، (۳) لا = ۱۶$$

$$(۴) لا = ۴ + لا = ۲ کی ترتیبیں بناؤ۔$$

ذیل کی مساواتوں کو ترتیبی طریق پر حل کرو

$$۳۔ لا + لا = ۲ = ۰$$

$$۵۔ لا + لا = ۱۰ = ۰$$

$$۷۔ لا + لا = ۵ = ۰$$

$$۹۔ لا + لا = ۲۰ = ۰$$

$$۹۔ لا + لا = ۲۶ = ۰$$

$$۸۔ لا + لا = ۲۰ = ۰$$

$$۱۱۔ لا + لا = ۱۲ = ۰$$

$$۱۰۔ لا + لا = ۴۵ = ۰$$

$$۱۳۔ لا + لا = ۲ = ۰$$

$$۱۲۔ لا + لا = ۱۵ = ۰$$

۱۴۔ ذیل کے جملات کی ترتیبیں بناؤ اور ہر صورت میں جملہ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو۔

$$(۱) لا + لا = ۵$$

$$(۲) لا + لا = ۴$$

$$(۳) لا + لا = ۲۲$$

۱۵۔ ذیل کے جملات کی ترتیبیں بناؤ اور ہر صورت میں جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ۱ - لا^۲ - لا^۲$$

$$(۲) \quad ۵ + لا^۲ - لا^۲$$

$$(۳) \quad ۵ + لا^۲ - لا^۲$$

۱۶۔ ترسیمی طریق پر ثابت کرو کہ تفاعل لا^۲ - لا^۲ - ۸، لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے منفی ہے جو - ۱۲ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں، لیکن ان حدود کے باہر لا کی تمام قیمتوں کے لئے یہ مثبت ہے۔

۱۷۔ ذیل کی مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرو۔

$$(۱) \quad لا^۲ + لا = ۱$$

$$(۲) \quad لا^۲ + لا = ۳۶$$

$$(۳) \quad لا^۲ + لا = ۱۱$$



جوابات

سوالات کے ترسیلی حل میں خواہ کتنی ہی احتیاط اور صحت سے کام لیا جائے نتائج محض تقریبی حاصل ہوں گے، جوابات ذیل نظری طریق پر حساب لگانے سے حاصل کئے گئے ہیں اور ان کی بنا پر طالب علم اپنے نتائج، شکل اور پیمائش کی جانچ کر سکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۱

- ۱۔ اکائی سنتی میٹر، ع ج = ۲، ر ع = ۲۵۵
 د ع = ۱۵۲، ر = ۱۵۵، د ب = ۱۵۹، د ج = ۳۵۲
 ۲۔ اکائی سنتی میٹر ا ل = ۶، ل م = ۲۵۵، م ج = ۲
 ا س = ۴۵، ۱۲ د ج = ۵۷۵، ر ل = ۱۵۵
 ۳۔ ۵۱۵ + ۵۱۵ - ۵۱۵ + ۵۱۵ = ۳۵۷
 تمام مسافت کے بعد وہ اپنی سمت روانگی میں - ۵۵ میل چلا۔

امثلہ نمبری ۲

- ۱۔ (۱، ۱) = ۱، (۱، ۵) = ۱، (۵، ۸) = ۰، (۸، ۰) = ۹
 (۰، ۵) = ۴، (۵، ۹) = ۱، (۹، ۱) = ۱، (۱، ۱) = ۱، (۱، ۰) = ۴
 (۲، ۲) = ۴، (۲، ۱۰) = ۱

۱۳۵۹۴' (۵۱۰'۱۵۳۱) (۴) ۸۵۳۰' (۵۱۰'۵۹۴) (۳)

امثالہ نمبری ۵

[illegible]

$$p = x_1, p_3 = 0, p_4 = 0$$

$$4 \equiv 6 \pmod{11} \implies 4 \quad 150 \equiv 6 \pmod{11} \implies 5$$

$\mu = 6$ / $\mu = 6$ — 8 $\mu = 6$ / $\mu = 6$ — 6

$$r = 6 \text{ m} = 0.06 \text{ km} \quad \text{and} \quad v = 6 \text{ m/s} = 0.006 \text{ km/s}$$

$$550 \leq 61251 \mu = 0 - 1 \mu \quad 150 \leq 61 \mu = 0 - 11$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$a = 1, p = x, u = 1, d$$

$$(1-1)(3) \quad (3'2)(2) \quad (1'2-)(1) = 14$$

$$(r-61)'(r+61)(1+r-61) = 16$$

$$(p, p)'(p, 0)'(r, 1) = 1A$$

$$L = L(r) \quad r = U(i) - r_0$$

$$x_1^2 - 11x + 11^2 (x) \quad 1 = 11 (x)$$

$$= 9^4 + 61^4 + 0(4) = 10 + 61 - 9(4)$$

$$\cdot 311 - 10 + 11 = 312$$

$$10 + 0.7 = 14 - PP \quad 0.0 = 14 - PP$$

۳۔ $1 + 2 = 3$ ، محور λ سے نقطہ $(0, 2)$ پر اور محور μ سے نقطہ $(2, 0)$ پر ملتا ہے۔

قسم ۲۔ اضلاع کی سادات میں $۱۰ = ۱۰ - ۱۲ + ۱۱$ ، $۱۰ = ۱۰ - ۱۲ + ۱۱$ ، $۱۰ = ۱۰ - ۱۲ + ۱۱$ ۔

وسطی خطوں کی مسافتیں $r = 6$ $\therefore = 6 + 13$ $r = 6$ $\therefore = 6 + 13$ $r = 6$ $\therefore = 6 + 13$

۴۔ اصطلاح کی مساواتیں: $۲ - لا = ۱ = ۰$ ، $۳ = ۱$ ، $۴ = ۲$ ، $۵ = ۳$ ، $۶ = ۴$ ، $۷ = ۵$ ، $۸ = ۶$ ، $۹ = ۷$ ، $۱۰ = ۸$ ، $۱۱ = ۹$ ، $۱۲ = ۱۰$ ، $۱۳ = ۱۱$ ، $۱۴ = ۱۲$ ، $۱۵ = ۱۳$ ، $۱۶ = ۱۴$ ، $۱۷ = ۱۵$ ، $۱۸ = ۱۶$ ، $۱۹ = ۱۷$ ، $۲۰ = ۱۸$ ، $۲۱ = ۱۹$ ، $۲۲ = ۲۰$ ، $۲۳ = ۲۱$ ، $۲۴ = ۲۲$ ، $۲۵ = ۲۳$ ، $۲۶ = ۲۴$ ، $۲۷ = ۲۵$ ، $۲۸ = ۲۶$ ، $۲۹ = ۲۷$ ، $۳۰ = ۲۸$ ، $۳۱ = ۲۹$ ، $۳۲ = ۳۰$ ، $۳۳ = ۳۱$ ، $۳۴ = ۳۲$ ، $۳۵ = ۳۳$ ، $۳۶ = ۳۴$ ، $۳۷ = ۳۵$ ، $۳۸ = ۳۶$ ، $۳۹ = ۳۷$ ، $۴۰ = ۳۸$ ، $۴۱ = ۳۹$ ، $۴۲ = ۴۰$ ، $۴۳ = ۴۱$ ، $۴۴ = ۴۲$ ، $۴۵ = ۴۳$ ، $۴۶ = ۴۴$ ، $۴۷ = ۴۵$ ، $۴۸ = ۴۶$ ، $۴۹ = ۴۷$ ، $۵۰ = ۴۸$ ، $۵۱ = ۴۹$ ، $۵۲ = ۵۰$ ، $۵۳ = ۵۱$ ، $۵۴ = ۵۲$ ، $۵۵ = ۵۳$ ، $۵۶ = ۵۴$ ، $۵۷ = ۵۵$ ، $۵۸ = ۵۶$ ، $۵۹ = ۵۷$ ، $۶۰ = ۵۸$ ، $۶۱ = ۵۹$ ، $۶۲ = ۶۰$ ، $۶۳ = ۶۱$ ، $۶۴ = ۶۲$ ، $۶۵ = ۶۳$ ، $۶۶ = ۶۴$ ، $۶۷ = ۶۵$ ، $۶۸ = ۶۶$ ، $۶۹ = ۶۷$ ، $۷۰ = ۶۸$ ، $۷۱ = ۶۹$ ، $۷۲ = ۷۰$ ، $۷۳ = ۷۱$ ، $۷۴ = ۷۲$ ، $۷۵ = ۷۳$ ، $۷۶ = ۷۴$ ، $۷۷ = ۷۵$ ، $۷۸ = ۷۶$ ، $۷۹ = ۷۷$ ، $۸۰ = ۷۸$ ، $۸۱ = ۷۹$ ، $۸۲ = ۸۰$ ، $۸۳ = ۸۱$ ، $۸۴ = ۸۲$ ، $۸۵ = ۸۳$ ، $۸۶ = ۸۴$ ، $۸۷ = ۸۵$ ، $۸۸ = ۸۶$ ، $۸۹ = ۸۷$ ، $۹۰ = ۸۸$ ، $۹۱ = ۸۹$ ، $۹۲ = ۹۰$ ، $۹۳ = ۹۱$ ، $۹۴ = ۹۲$ ، $۹۵ = ۹۳$ ، $۹۶ = ۹۴$ ، $۹۷ = ۹۵$ ، $۹۸ = ۹۶$ ، $۹۹ = ۹۷$ ، $۱۰۰ = ۹۸$ ، $۱۰۱ = ۹۹$ ، $۱۰۲ = ۱۰۰$ ، $۱۰۳ = ۱۰۱$ ، $۱۰۴ = ۱۰۲$ ، $۱۰۵ = ۱۰۳$ ، $۱۰۶ = ۱۰۴$ ، $۱۰۷ = ۱۰۵$ ، $۱۰۸ = ۱۰۶$ ، $۱۰۹ = ۱۰۷$ ، $۱۱۰ = ۱۰۸$ ، $۱۱۱ = ۱۰۹$ ، $۱۱۲ = ۱۱۰$ ، $۱۱۳ = ۱۱۱$ ، $۱۱۴ = ۱۱۲$ ، $۱۱۵ = ۱۱۳$ ، $۱۱۶ = ۱۱۴$ ، $۱۱۷ = ۱۱۵$ ، $۱۱۸ = ۱۱۶$ ، $۱۱۹ = ۱۱۷$ ، $۱۲۰ = ۱۱۸$ ، $۱۲۱ = ۱۱۹$ ، $۱۲۲ = ۱۲۰$ ، $۱۲۳ = ۱۲۱$ ، $۱۲۴ = ۱۲۲$ ، $۱۲۵ = ۱۲۳$ ، $۱۲۶ = ۱۲۴$ ، $۱۲۷ = ۱۲۵$ ، $۱۲۸ = ۱۲۶$ ، $۱۲۹ = ۱۲۷$ ، $۱۳۰ = ۱۲۸$ ، $۱۳۱ = ۱۲۹$ ، $۱۳۲ = ۱۳۰$ ، $۱۳۳ = ۱۳۱$ ، $۱۳۴ = ۱۳۲$ ، $۱۳۵ = ۱۳۳$ ، $۱۳۶ = ۱۳۴$ ، $۱۳۷ = ۱۳۵$ ، $۱۳۸ = ۱۳۶$ ، $۱۳۹ = ۱۳۷$ ، $۱۴۰ = ۱۳۸$ ، $۱۴۱ = ۱۳۹$ ، $۱۴۲ = ۱۴۰$ ، $۱۴۳ = ۱۴۱$ ، $۱۴۴ = ۱۴۲$ ، $۱۴۵ = ۱۴۳$ ، $۱۴۶ = ۱۴۴$ ، $۱۴۷ = ۱۴۵$ ، $۱۴۸ = ۱۴۶$ ، $۱۴۹ = ۱۴۷$ ، $۱۵۰ = ۱۴۸$ ، $۱۵۱ = ۱۴۹$ ، $۱۵۲ = ۱۵۰$ ، $۱۵۳ = ۱۵۱$ ، $۱۵۴ = ۱۵۲$ ، $۱۵۵ = ۱۵۳$ ، $۱۵۶ = ۱۵۴$ ، $۱۵۷ = ۱۵۵$ ، $۱۵۸ = ۱۵۶$ ، $۱۵۹ = ۱۵۷$ ، $۱۶۰ = ۱۵۸$ ، $۱۶۱ = ۱۵۹$ ، $۱۶۲ = ۱۶۰$ ، $۱۶۳ = ۱۶۱$ ، $۱۶۴ = ۱۶۲$ ، $۱۶۵ = ۱۶۳$ ، $۱۶۶ = ۱۶۴$ ، $۱۶۷ = ۱۶۵$ ، $۱۶۸ = ۱۶۶$ ، $۱۶۹ = ۱۶۷$ ، $۱۷۰ = ۱۶۸$ ، $۱۷۱ = ۱۶۹$ ، $۱۷۲ = ۱۷۰$ ، $۱۷۳ = ۱۷۱$ ، $۱۷۴ = ۱۷۲$ ، $۱۷۵ = ۱۷۳$ ، $۱۷۶ = ۱۷۴$ ، $۱۷۷ = ۱۷۵$ ، $۱۷۸ = ۱۷۶$ ، $۱۷۹ = ۱۷۷$ ، $۱۸۰ = ۱۷۸$ ، $۱۸۱ = ۱۷۹$ ، $۱۸۲ = ۱۸۰$ ، $۱۸۳ = ۱۸۱$ ، $۱۸۴ = ۱۸۲$ ، $۱۸۵ = ۱۸۳$ ، $۱۸۶ = ۱۸۴$ ، $۱۸۷ = ۱۸۵$ ، $۱۸۸ = ۱۸۶$ ، $۱۸۹ = ۱۸۷$ ، $۱۹۰ = ۱۸۸$ ، $۱۹۱ = ۱۸۹$ ، $۱۹۲ = ۱۹۰$ ، $۱۹۳ = ۱۹۱$ ، $۱۹۴ = ۱۹۲$ ، $۱۹۵ = ۱۹۳$ ، $۱۹۶ = ۱۹۴$ ، $۱۹۷ = ۱۹۵$ ، $۱۹۸ = ۱۹۶$ ، $۱۹۹ = ۱۹۷$ ، $۲۰۰ = ۱۹۸$ ، $۲۰۱ = ۱۹۹$ ، $۲۰۲ = ۲۰۰$ ، $۲۰۳ = ۲۰۱$ ، $۲۰۴ = ۲۰۲$ ، $۲۰۵ = ۲۰۳$ ، $۲۰۶ = ۲۰۴$ ، $۲۰۷ = ۲۰۵$ ، $۲۰۸ = ۲۰۶$ ، $۲۰۹ = ۲۰۷$ ، $۲۱۰ = ۲۰۸$ ، $۲۱۱ = ۲۰۹$ ، $۲۱۲ = ۲۱۰$ ، $۲۱۳ = ۲۱۱$ ، $۲۱۴ = ۲۱۲$ ، $۲۱۵ = ۲۱۳$ ، $۲۱۶ = ۲۱$

بہتلی خطوط کی مسافتیں $2 = 1 + 1$ $3 = 1 + 1 + 1$ $4 = 1 + 1 + 1 + 1$

• 2 1 4 - 1 2 4 4 4

امثلہ نمبری ۶

- ۱۔ $\frac{1}{4}$ سیر ۲۶ روپیہ
- ۲۔ ۳۶۵ روپیہ تقریباً
- ۳۔ ۵ روپیہ ۱۰ آنہ ۴۵
- ۴۔ ۱۱ بجکر ۲۴ منٹ ۱۱ میل
- ۵۔ ۳۴ منٹ ۶ میل
- ۸۔ ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۲۵، ۳۵، ۴۱، ۵۱ سکند
- ۹۔ ۹ بجکر ۳۴ منٹ ۱۷ سکند، ۱ کے مقام روانگی سے $\frac{1}{2}$ ۱۴ میل پر
- $\frac{1}{4}$ میل، ۸ بجکر ۳۴ منٹ پر تقریباً
- ۱۰۔ ۴ گھنٹے میں
- ۱۱۔ ایک گھنٹے کے بعد، مقام روانگی سے ۶ میل کے فاصلہ پر
- ۱۲۔ ۱۱ بجکر ۱۵ منٹ کے بعد، مقام روانگی سے $\frac{1}{4}$ ۱۱ میل پر
- ۱۳۔ ۱۰ بجکر ۳۴ منٹ ۲۵ سکند، مقام روانگی سے تقریباً ۱۸ میل کے فاصلہ پر
- ۱۴۔ ۱۳ دفعہ ہر $\frac{1}{4}$ ۱۳ منٹ کے بعد، گزشتہ مقام ملاقات سے $\frac{2}{3}$ ۵۸۶
- گزر کے فاصلہ پر
- ۱۶۔ (۱) ۷ بجکر ۴۵، ۵ منٹ پر، ۷ بجکر ۲۲، ۳۲ منٹ اور ۳۳، ۳۴ منٹ کے بعد
- ۱۷۔ ۴۵، ۵ منٹ، ۱۰، ۱۱ منٹ، ۵۵، ۵۵ واں حصہ۔
- ۱۸۔ دوسری نالی کھولنے کے ۸، ۱۰ گھنٹہ اور ۱۲ گھنٹہ بعد بالترتیب
- ۱۹۔ ۲۶، ۱ گھنٹہ میں
- ۲۰۔ ۴، ۰، ۸ دن
- ۲۱۔ ۱، ۹ دن میں
- ۲۲۔ ۸، ۵، ۵ روپیہ
- ۲۳۔ ۹۶ روپیہ
- ۲۴۔ نسبت ۱:۲ سے
- ۲۵۔ ۴۸، ۵۵، ۴۸ تقریباً
- ۲۶۔ ۱۳ پونڈ
- ۲۷۔ ۳۱، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۵، ۱۹۷، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۱، ۲۷۳، ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۳، ۲۸۵، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۱، ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۷، ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۵، ۳۴۷، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۱، ۳۶۳، ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹، ۳۷۱، ۳۷۳، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۷۹، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۵، ۳۸۷، ۳۸۹، ۳۹۱، ۳۹۳، ۳۹۵، ۳۹۷، ۳۹۹، ۴۰۱، ۴۰۳، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۱۱، ۴۱۳، ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۱۹، ۴۲۱، ۴۲۳، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۳۹، ۴۴۱، ۴۴۳، ۴۴۵، ۴۴۷، ۴۴۹، ۴۵۱، ۴۵۳، ۴۵۵، ۴۵۷، ۴۵۹، ۴۶۱، ۴۶۳، ۴۶۵، ۴۶۷، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۷۷، ۴۷۹، ۴۸۱، ۴۸۳، ۴۸۵، ۴۸۷، ۴۸۹، ۴۹۱، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۷، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۷، ۵۰۹، ۵۱۱، ۵۱۳، ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۱۹، ۵۲۱، ۵۲۳، ۵۲۵، ۵۲۷، ۵۲۹، ۵۳۱، ۵۳۳، ۵۳۵، ۵۳۷، ۵۳۹، ۵۴۱، ۵۴۳، ۵۴۵، ۵۴۷، ۵۴۹، ۵۵۱، ۵۵۳، ۵۵۵، ۵۵۷، ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۷، ۵۶۹، ۵۷۱، ۵۷۳، ۵۷۵، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۱، ۵۸۳، ۵۸۵، ۵۸۷، ۵۸۹، ۵۹۱، ۵۹۳، ۵۹۵، ۵۹۷، ۵۹۹، ۶۰۱، ۶۰۳، ۶۰۵، ۶۰۷، ۶۰۹، ۶۱۱، ۶۱۳، ۶۱۵، ۶۱۷، ۶۱۹، ۶۲۱، ۶۲۳، ۶۲۵، ۶۲۷، ۶۲۹، ۶۳۱، ۶۳۳، ۶۳۵، ۶۳۷، ۶۳۹، ۶۴۱، ۶۴۳، ۶۴۵، ۶۴۷، ۶۴۹، ۶۵۱، ۶۵۳، ۶۵۵، ۶۵۷، ۶۵۹، ۶۶۱، ۶۶۳، ۶۶۵، ۶۶۷، ۶۶۹، ۶۷۱، ۶۷۳، ۶۷۵، ۶۷۷، ۶۷۹، ۶۸۱، ۶۸۳، ۶۸۵، ۶۸۷، ۶۸۹، ۶۹۱، ۶۹۳، ۶۹۵، ۶۹۷، ۶۹۹، ۷۰۱، ۷۰۳، ۷۰۵، ۷۰۷، ۷۰۹، ۷۱۱، ۷۱۳، ۷۱۵، ۷۱۷، ۷۱۹، ۷۲۱، ۷۲۳، ۷۲۵، ۷۲۷، ۷۲۹، ۷۳۱، ۷۳۳، ۷۳۵، ۷۳۷، ۷۳۹، ۷۴۱، ۷۴۳، ۷۴۵، ۷۴۷، ۷۴۹، ۷۵۱، ۷۵۳، ۷۵۵، ۷۵۷، ۷۵۹، ۷۶۱، ۷۶۳، ۷۶۵، ۷۶۷، ۷۶۹، ۷۷۱، ۷۷۳، ۷۷۵، ۷۷۷، ۷۷۹، ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۷، ۷۸۹، ۷۹۱، ۷۹۳، ۷۹۵، ۷۹۷، ۷۹۹، ۸۰۱، ۸۰۳، ۸۰۵، ۸۰۷، ۸۰۹، ۸۱۱، ۸۱۳، ۸۱۵، ۸۱۷، ۸۱۹، ۸۲۱، ۸۲۳، ۸۲۵، ۸۲۷، ۸۲۹، ۸۳۱، ۸۳۳، ۸۳۵، ۸۳۷، ۸۳۹، ۸۴۱، ۸۴۳، ۸۴۵، ۸۴۷، ۸۴۹، ۸۵۱، ۸۵۳، ۸۵۵، ۸۵۷، ۸۵۹، ۸۶۱، ۸۶۳، ۸۶۵، ۸۶۷، ۸۶۹، ۸۷۱، ۸۷۳، ۸۷۵، ۸۷۷، ۸۷۹، ۸۸۱، ۸۸۳، ۸۸۵، ۸۸۷، ۸۸۹، ۸۹۱، ۸۹۳، ۸۹۵، ۸۹۷، ۸۹۹، ۹۰۱، ۹۰۳، ۹۰۵، ۹۰۷، ۹۰۹، ۹۱۱، ۹۱۳، ۹۱۵، ۹۱۷، ۹۱۹، ۹۲۱، ۹۲۳، ۹۲۵، ۹۲۷، ۹۲۹، ۹۳۱، ۹۳۳، ۹۳۵، ۹۳۷، ۹۳۹، ۹۴۱، ۹۴۳، ۹۴۵، ۹۴۷، ۹۴۹، ۹۵۱، ۹۵۳، ۹۵۵، ۹۵۷، ۹۵۹، ۹۶۱، ۹۶۳، ۹۶۵، ۹۶۷، ۹۶۹، ۹۷۱، ۹۷۳، ۹۷۵، ۹۷۷، ۹۷۹، ۹۸۱، ۹۸۳، ۹۸۵، ۹۸۷، ۹۸۹، ۹۹۱، ۹۹۳، ۹۹۵، ۹۹۷، ۹۹۹، ۱۰۰۱، ۱۰۰۳، ۱۰۰۵، ۱۰۰۷، ۱۰۰۹، ۱۰۱۱، ۱۰۱۳، ۱۰۱۵، ۱۰۱۷، ۱۰۱۹، ۱۰۲۱، ۱۰۲۳، ۱۰۲۵، ۱۰۲۷، ۱۰۲۹، ۱۰۳۱، ۱۰۳۳، ۱۰۳۵، ۱۰۳۷، ۱۰۳۹، ۱۰۴۱، ۱۰۴۳، ۱۰۴۵، ۱۰۴۷، ۱۰۴۹، ۱۰۵۱، ۱۰۵۳، ۱۰۵۵، ۱۰۵۷، ۱۰۵۹، ۱۰۶۱، ۱۰۶۳، ۱۰۶۵، ۱۰۶۷، ۱۰۶۹، ۱۰۷۱، ۱۰۷۳، ۱۰۷۵، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، ۱۰۸۱، ۱۰۸۳، ۱۰۸۵، ۱۰۸۷، ۱۰۸۹، ۱۰۹۱، ۱۰۹۳، ۱۰۹۵، ۱۰۹۷، ۱۰۹۹، ۱۱۰۱، ۱۱۰۳، ۱۱۰۵، ۱۱۰۷، ۱۱۰۹، ۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۱۵، ۱۱۱۷، ۱۱۱۹، ۱۱۲۱، ۱۱۲۳، ۱۱۲۵، ۱۱۲۷، ۱۱۲۹، ۱۱۳۱، ۱۱۳۳، ۱۱۳۵، ۱۱۳۷، ۱۱۳۹، ۱۱۴۱، ۱۱۴۳، ۱۱۴۵، ۱۱۴۷، ۱۱۴۹، ۱۱۵۱، ۱۱۵۳، ۱۱۵۵، ۱۱۵۷، ۱۱۵۹، ۱۱۶۱، ۱۱۶۳، ۱۱۶۵، ۱۱۶۷، ۱۱۶۹، ۱۱۷۱، ۱۱۷۳، ۱۱۷۵، ۱۱۷۷، ۱۱۷۹، ۱۱۸۱، ۱۱۸۳، ۱۱۸۵، ۱۱۸۷، ۱۱۸۹، ۱۱۹۱، ۱۱۹۳، ۱۱۹۵، ۱۱۹۷، ۱۱۹۹، ۱۲۰۱، ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۰۷، ۱۲۰۹، ۱۲۱۱، ۱۲۱۳، ۱۲۱۵، ۱۲۱۷، ۱۲۱۹، ۱۲۲۱، ۱۲۲۳، ۱۲۲۵، ۱۲۲۷، ۱۲۲۹، ۱۲۳۱، ۱۲۳۳، ۱۲۳۵، ۱۲۳۷، ۱۲۳۹، ۱۲۴۱، ۱۲۴۳، ۱۲۴۵، ۱۲۴۷، ۱۲۴۹، ۱۲۵۱، ۱۲۵۳، ۱۲۵۵، ۱۲۵۷، ۱۲۵۹، ۱۲۶۱، ۱۲۶۳، ۱۲۶۵، ۱۲۶۷، ۱۲۶۹، ۱۲۷۱، ۱۲۷۳، ۱۲۷۵، ۱۲۷۷، ۱۲۷۹، ۱۲۸۱، ۱۲۸۳، ۱۲۸۵، ۱۲۸۷، ۱۲۸۹، ۱۲۹۱، ۱۲۹۳، ۱۲۹۵، ۱۲۹۷، ۱۲۹۹، ۱۳۰۱، ۱۳۰۳، ۱۳۰۵، ۱۳۰۷، ۱۳۰۹، ۱۳۱۱، ۱۳۱۳، ۱۳۱۵، ۱۳۱۷، ۱۳۱۹، ۱۳۲۱، ۱۳۲۳، ۱۳۲۵، ۱۳۲۷، ۱۳۲۹، ۱۳۳۱، ۱۳۳۳، ۱۳۳۵، ۱۳۳۷، ۱۳۳۹، ۱۳۴۱، ۱۳۴۳، ۱۳۴۵، ۱۳۴۷، ۱۳۴۹، ۱۳۵۱، ۱۳۵۳، ۱۳۵۵، ۱۳۵۷، ۱۳۵۹، ۱۳۶۱، ۱۳۶۳، ۱۳۶۵، ۱۳۶۷، ۱۳۶۹، ۱۳۷۱، ۱۳۷۳، ۱۳۷۵، ۱۳۷۷، ۱۳۷۹، ۱۳۸۱، ۱۳۸۳، ۱۳۸۵، ۱۳۸۷، ۱۳۸۹، ۱۳۹۱، ۱۳۹۳، ۱۳۹۵، ۱۳۹۷، ۱۳۹۹، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۵، ۱۴۰۷، ۱۴۰۹، ۱۴۱۱، ۱۴۱۳، ۱۴۱۵، ۱۴۱۷، ۱۴۱۹، ۱۴۲۱، ۱۴۲۳، ۱۴۲۵، ۱۴۲۷، ۱۴۲۹، ۱۴۳۱، ۱۴۳۳، ۱۴۳۵، ۱۴۳۷، ۱۴۳۹، ۱۴۴۱، ۱۴۴۳، ۱۴۴۵، ۱۴۴۷، ۱۴۴۹، ۱۴۵۱، ۱۴۵۳، ۱۴۵۵، ۱۴۵۷، ۱۴۵۹، ۱۴۶۱، ۱۴۶۳، ۱۴۶۵، ۱۴۶۷، ۱۴۶۹، ۱۴۷۱، ۱۴۷۳، ۱۴۷۵، ۱۴۷۷، ۱۴۷۹، ۱۴۸۱، ۱۴۸۳، ۱۴۸۵، ۱۴۸۷، ۱۴۸۹، ۱۴۹۱، ۱۴۹۳، ۱۴۹۵، ۱۴۹۷، ۱۴۹۹، ۱۵۰۱، ۱۵۰۳، ۱۵۰۵، ۱۵۰۷، ۱۵۰۹، ۱۵۱۱، ۱۵۱۳، ۱۵۱۵، ۱۵۱۷، ۱۵۱۹، ۱۵۲۱، ۱۵۲۳، ۱۵۲۵، ۱۵۲۷، ۱۵۲۹، ۱۵۳۱، ۱۵۳۳، ۱۵۳۵، ۱۵۳۷، ۱۵۳۹، ۱۵۴۱، ۱۵۴۳، ۱۵۴۵، ۱۵۴۷، ۱۵۴۹، ۱۵۵۱، ۱۵۵۳، ۱۵۵۵، ۱۵۵۷، ۱۵۵۹، ۱۵۶۱، ۱۵۶۳، ۱۵۶۵، ۱۵۶۷، ۱۵۶۹، ۱۵۷۱، ۱۵۷۳، ۱۵۷۵، ۱۵۷۷، ۱۵۷۹، ۱۵۸۱، ۱۵۸۳، ۱۵۸۵، ۱۵۸۷، ۱۵۸۹، ۱۵۹۱، ۱۵۹۳، ۱۵۹۵، ۱۵۹۷، ۱۵۹۹، ۱۶۰۱، ۱۶۰۳، ۱۶۰۵، ۱۶۰۷، ۱۶۰۹، ۱۶۱۱، ۱۶۱۳، ۱۶۱۵، ۱۶۱۷، ۱۶۱۹، ۱۶۲۱، ۱۶۲۳، ۱۶۲۵، ۱۶۲۷، ۱۶۲۹، ۱۶۳۱، ۱۶۳۳، ۱۶۳۵، ۱۶۳۷، ۱۶۳۹، ۱۶۴۱، ۱۶۴۳، ۱۶۴۵، ۱۶۴۷، ۱۶۴۹، ۱۶۵۱، ۱۶۵۳، ۱۶۵۵، ۱۶۵۷، ۱۶۵۹، ۱۶۶۱، ۱۶۶۳، ۱۶۶۵، ۱۶۶۷، ۱۶۶۹، ۱۶۷۱، ۱۶۷۳، ۱۶۷۵، ۱۶۷۷، ۱۶۷۹، ۱۶۸۱، ۱۶۸۳، ۱۶۸۵، ۱۶۸۷، ۱۶۸۹، ۱۶۹۱، ۱۶۹۳، ۱۶۹۵، ۱۶۹۷، ۱۶۹۹، ۱۷۰۱، ۱۷۰۳، ۱۷۰۵، ۱۷۰۷، ۱۷۰۹، ۱۷۱۱، ۱۷۱۳، ۱۷۱۵، ۱۷۱۷، ۱۷۱۹، ۱۷۲۱، ۱۷۲۳، ۱۷۲۵، ۱۷۲۷، ۱۷۲۹، ۱۷۳۱، ۱۷۳۳، ۱۷۳۵، ۱۷۳۷، ۱۷۳۹، ۱۷۴۱، ۱۷۴۳، ۱۷۴۵، ۱۷۴۷، ۱۷۴۹، ۱۷۵۱، ۱۷۵۳، ۱۷۵۵، ۱۷۵۷، ۱۷۵۹، ۱۷۶۱، ۱۷۶۳، ۱۷۶۵، ۱۷۶۷، ۱۷۶۹، ۱۷۷۱، ۱۷۷۳، ۱۷۷۵، ۱۷۷۷، ۱۷۷۹، ۱۷۸۱، ۱۷۸۳، ۱۷۸۵، ۱۷۸۷، ۱۷۸۹، ۱۷۹۱، ۱۷۹۳، ۱۷۹۵، ۱۷۹۷، ۱۷۹۹، ۱۸۰۱، ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، ۱۸۰۷، ۱۸۰۹، ۱۸۱۱، ۱۸۱۳، ۱۸۱۵، ۱۸۱۷، ۱۸۱۹، ۱۸۲۱، ۱۸۲۳، ۱۸۲۵، ۱۸۲۷، ۱۸۲۹، ۱۸۳۱، ۱۸۳۳، ۱۸۳۵، ۱۸۳۷، ۱۸۳۹، ۱۸۴۱، ۱۸۴۳، ۱۸۴۵، ۱۸۴۷، ۱۸۴۹، ۱۸۵۱، ۱۸۵۳، ۱۸۵۵، ۱۸۵۷، ۱۸۵۹، ۱۸۶۱، ۱۸۶۳، ۱۸۶۵، ۱۸۶۷، ۱۸۶۹، ۱۸۷۱، ۱۸۷۳، ۱۸۷۵، ۱۸۷۷، ۱۸۷۹، ۱۸۸۱، ۱۸۸۳، ۱۸۸۵، ۱۸۸۷، ۱۸۸۹، ۱۸۹۱، ۱۸۹۳، ۱۸۹۵، ۱۸۹۷، ۱۸۹۹، ۱۹۰۱، ۱۹۰۳، ۱۹۰۵، ۱۹۰۷، ۱۹۰۹، ۱۹۱۱، ۱۹۱۳، ۱۹۱۵، ۱۹۱۷، ۱۹۱۹، ۱۹۲۱، ۱۹۲۳، ۱۹۲۵، ۱۹۲۷، ۱۹۲۹، ۱۹۳۱، ۱۹۳۳، ۱۹۳۵، ۱۹۳۷، ۱۹۳۹، ۱۹۴۱، ۱۹۴۳، ۱۹۴۵، ۱۹۴۷، ۱۹۴۹، ۱۹۵۱، ۱۹۵۳، ۱۹۵۵، ۱۹۵۷، ۱۹۵۹، ۱۹۶۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷، ۱۹۶۹، ۱۹۷۱، ۱۹۷۳، ۱۹۷۵، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷، ۱۹۹۹، ۲۰۰۱، ۲۰۰۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳، ۲۰۱۵، ۲۰۱۷، ۲۰۱۹، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳، ۲۰۲۵، ۲۰۲۷، ۲۰۲۹، ۲۰۳۱، ۲۰۳۳، ۲۰۳۵، ۲۰۳۷، ۲۰۳۹، ۲۰۴۱، ۲۰۴۳، ۲۰۴۵، ۲۰۴۷، ۲۰۴۹، ۲۰۵۱، ۲۰۵۳، ۲۰۵۵، ۲۰۵۷، ۲۰۵۹، ۲۰۶۱، ۲۰۶۳، ۲۰۶۵، ۲۰۶۷، ۲۰۶۹، ۲۰۷۱، ۲۰۷۳، ۲۰۷۵، ۲۰۷۷، ۲۰۷۹، ۲۰۸۱، ۲۰۸۳، ۲۰۸۵، ۲۰۸۷، ۲۰۸۹، ۲۰۹۱، ۲۰۹۳، ۲۰۹۵، ۲۰۹۷، ۲۰۹۹، ۲۱۰۱، ۲۱۰۳، ۲۱۰۵، ۲۱۰۷، ۲۱۰۹، ۲۱۱۱، ۲۱۱۳، ۲۱۱۵، ۲۱۱۷، ۲۱۱۹، ۲۱۲۱، ۲۱۲۳، ۲۱۲۵، ۲۱۲۷، ۲۱۲۹، ۲۱۳۱، ۲۱۳۳، ۲۱۳۵، ۲۱۳۷، ۲۱۳۹، ۲۱۴۱، ۲۱۴۳، ۲۱۴۵، ۲۱۴۷، ۲۱۴۹، ۲۱۵۱، ۲۱۵۳، ۲۱۵۵، ۲۱۵۷، ۲۱۵۹، ۲۱۶۱، ۲۱۶۳، ۲۱۶۵، ۲۱۶۷، ۲۱۶۹، ۲۱۷۱، ۲۱۷۳، ۲۱۷۵، ۲۱۷۷، ۲۱۷۹، ۲۱۸۱، ۲۱۸۳، ۲۱۸۵، ۲۱۸۷، ۲۱۸۹، ۲۱۹۱، ۲۱۹۳، ۲۱۹۵، ۲۱۹۷، ۲۱۹۹، ۲۲۰۱، ۲۲۰۳، ۲۲۰۵، ۲۲۰۷، ۲۲۰۹، ۲۲۱۱، ۲۲۱۳، ۲۲۱۵، ۲۲۱۷، ۲۲۱۹، ۲۲۲۱، ۲۲۲۳، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۹، ۲۲۳۱، ۲۲۳۳، ۲۲۳۵، ۲۲۳۷، ۲۲۳۹، ۲۲۴۱، ۲۲۴۳، ۲۲۴۵، ۲۲۴۷، ۲۲۴۹، ۲۲۵۱، ۲۲۵۳، ۲۲۵۵، ۲۲۵۷، ۲۲۵۹، ۲۲۶۱، ۲۲۶۳، ۲۲۶۵، ۲۲۶۷، ۲۲۶۹، ۲۲۷۱، ۲۲۷۳، ۲۲۷۵، ۲۲۷۷، ۲۲۷۹، ۲۲۸۱، ۲۲۸۳، ۲۲۸۵، ۲۲۸۷، ۲۲۸۹، ۲۲۹۱، ۲۲۹۳، ۲۲۹۵، ۲۲۹۷، ۲۲۹۹، ۲۳۰۱، ۲۳۰۳، ۲۳۰۵، ۲۳۰۷، ۲۳۰۹، ۲۳۱۱، ۲۳۱۳، ۲۳۱۵، ۲۳۱۷، ۲۳۱۹، ۲۳۲۱، ۲۳۲۳، ۲۳۲۵، ۲۳۲۷، ۲۳۲۹، ۲۳۳۱، ۲۳۳۳، ۲۳۳۵، ۲۳۳۷، ۲۳۳۹، ۲۳۴۱، ۲۳۴۳، ۲۳۴۵، ۲۳۴۷، ۲۳۴۹، ۲۳۵۱، ۲۳۵۳، ۲۳۵۵، ۲۳۵۷، ۲۳۵۹، ۲۳۶۱، ۲۳۶۳، ۲۳۶۵، ۲۳۶۷، ۲۳۶۹، ۲۳۷۱، ۲۳۷۳، ۲۳۷۵، ۲۳۷۷، ۲۳۷۹، ۲۳۸۱، ۲۳۸۳، ۲۳۸۵، ۲۳۸۷، ۲۳۸۹، ۲۳۹۱، ۲۳۹۳، ۲۳۹۵، ۲۳۹۷، ۲۳۹۹، ۲۴۰۱، ۲۴۰۳، ۲۴۰۵، ۲۴۰۷، ۲۴۰۹، ۲۴۱۱، ۲۴۱۳، ۲۴۱۵، ۲۴۱۷، ۲۴۱۹، ۲۴۲۱، ۲۴۲۳، ۲۴۲۵، ۲۴۲۷، ۲۴۲۹، ۲۴۳۱، ۲۴۳۳، ۲۴۳۵، ۲۴۳۷، ۲۴۳۹، ۲۴۴۱، ۲۴۴۳، ۲۴۴۵، ۲۴۴۷، ۲۴۴۹، ۲۴۵۱، ۲۴۵۳، ۲۴۵۵، ۲۴۵۷، ۲۴۵۹، ۲۴۶۱، ۲۴۶۳، ۲۴۶۵، ۲۴۶۷، ۲۴۶۹، ۲۴۷۱، ۲۴۷۳، ۲۴۷۵، ۲۴۷۷، ۲۴۷۹، ۲۴۸۱، ۲۴۸۳، ۲۴۸۵، ۲۴۸۷، ۲۴۸۹، ۲۴۹۱، ۲۴۹۳، ۲۴۹۵، ۲۴۹۷، ۲۴۹۹، ۲۵۰۱، ۲۵

امثلہ نمبری ۷

۱۸۔ ۵۸ و ۹۳ و ۳۴ و ۶۵ و ۸۳ و ۶۵ و ۴۵ و ۲۸ سال
۱۹۔ ۱۴ و ۸۲ و ۴۰۔ ۱۵۵ اور ۶ و ۳ تقریباً

- ۲۱- ۱۶۲، ۸۸ و ۳ فٹ تقریباً ۲۲- ۳۰، ۲۹۵۹۲، ۲۹۶۹۳
- ۲۳- ۴ سنی گریڈ پر حجم ۵ مکعب سنی میٹر اور ۲۰ مکعب اینچ حجم پر پیش
- ۲۴ سنی گریڈ
- ۲۵- ۱۵۶، ۹ و مکعب فٹ، ۲۵۷ پونڈ

امثلہ نمبری ۸

- | | |
|----------------------------|---------------------|
| ۲- ۱۲۰ | ۱- ۲۱ |
| ۴- ۲۰ | ۳- ۱۰ |
| ۶- ۱۲، ج | ۵- ۱، ب |
| ۸- ۱، ب، ب + ج | ۷- ۱، ۱/۲ |
| ۱۰- ۲، (ب + ۱)، ۳، (ب - ۱) | ۹- ۳، ۲ |
| ۱۲- ۵، ۲ | ۱۱- ۲، ۱ |
| ۱۴- ۳، ۱ | ۱۳- ۱، ۱/۳ |
| ۱۶- ۲، ۱ | ۱۵- ۳، ۲، ۱ |
| ۱۸- ۵، ۱/۳، ۱/۴، ب | ۱۷- ۱، ۱/۵ |
| ۲۰- ۳ = لا، ۱۷ = لا | ۱۹- ۲ = لا، ۱۵ = لا |
| ۲۲- ۳ - ۱۹ = لا | ۲۱- ۱ + ۱۴ = لا |
| ۲۴- ۱ - ۲/۳ = لا | ۲۳- ۱ - ۱۲ = لا |
| ۲۶- ۵ + ۱۸ = لا | ۲۵- ۵ - ۱۶ = لا |
| ۲۸- ۱ - ۱۲ = لا | ۲۷- ۵ - ۳/۲ = لا |
| ۳۰- ۱/۳ - ۱۳ = لا | ۲۹- ۱، ۱ |
| ۳۲- ۱۱ + ۱۳ = لا | ۳۱- ۳/۵، ۵/۳ = لا |
| ۳۴- ۱، ۱ = لا | ۳۳- ۱/۲، ۱۲ = لا |

$$\frac{3}{2} - 15 = 7 - 34$$

$$\frac{2}{3} - 13 = 9 - 38$$

$$2 - 15 = 7 - 35$$

$$13 - 12 = 9 - 36$$

امثلة نمبری ۹

$$\frac{2}{3} - 1 - 2$$

$$\frac{1}{2} - 2 - 3$$

$$\frac{3}{2} - 1 - 4$$

$$2 - 5 = 8$$

$$\frac{1}{2} - 1 - 10$$

$$\frac{5}{2} - 1 - 12$$

$$2 - 11 = 13$$

$$\frac{9}{2} - 12 = 14$$

$$\frac{1}{2} - 13 = 16$$

$$2 - 14 = 19$$

$$13 - 15 = 21$$

$$14 - 16 = 23$$

$$15 - 17 = 25$$

$$16 - 18 = 27$$

$$17 - 19 = 29$$

$$\frac{2}{3} - 1 - 2$$

$$3 - 1 - 3$$

$$\frac{1}{2} - 13 = 5$$

$$2 - 14 = 6$$

$$4 - 18 = 9$$

$$\frac{5}{2} - 1 - 11$$

$$\frac{3}{2} - 15 = 13$$

$$9 - 12 = 15$$

$$13 - 14 = 14$$

$$\frac{6}{2} - 13 = 18$$

$$15 - 16 = 20$$

$$\frac{2}{5} - 15 = 22$$

$$15 - 17 = 24$$

$$16 - 18 = 26$$

$$17 - 19 = 28$$

$$\begin{aligned}
 ۳۱ - ۳ \pm ۵ \pm ۲ \\
 ۳۳ - ۳ \pm ۳ \pm ۲ \\
 ۳۵ - ۳ \pm ۲ \pm \frac{1}{۳} \\
 ۳۷ - ۱ \pm ۱ \pm \text{باقی خیالی} \\
 ۳۹ - ۳ \pm \frac{1}{۳} \pm ۱ \\
 ۴۱ - ۱۰ - ۵ \pm \text{باقی خیالی} \\
 ۴۳ - ۳۲ \pm ۹ \pm ۲ \pm ۴ - ۲ \\
 ۴۵ - \frac{۷}{۵} - \frac{۷}{۵} - \frac{1}{۵}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳۰ - ۳ \pm ۳ \pm ۱ \\
 ۳۲ - ۳ \pm ۴ \pm ۳ \\
 ۳۳ - ۲ \pm ۳ \\
 ۳۴ - ۳ \pm ۲ \pm ۱ \pm \text{ج} \\
 ۳۸ - ۱ \pm \text{باقی خیالی} \\
 ۴۰ - ۱ - ۱ - \frac{۲}{۳} \\
 ۴۲ - ۲۵ \pm \text{باقی خیالی} \\
 ۴۴ - ۶ - \frac{۵}{۲}
 \end{aligned}$$

امثلہ نمبری ۱۰

$$\begin{aligned}
 ۱ - ۲ - ۳۵ - ۳۹ - ۳۵ - ۳۹ \\
 ۳ - ۱۵ - ۲۰ - ۲۵ - ۱۵ - ۲۰ - ۲۵ - ۳۹ \\
 ۵ - ۲۸ - ۲۸ - ۲۸ \\
 ۸ - ۱۸ - ۱۹ - ۱۸ - ۱۹ - ۱۸ - ۱۹ - ۱۵ \\
 ۹ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۲۳ \\
 ۱۱ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۲ - ۱۱ \\
 ۱۳ - ۱۱ - ۱۱ - ۱۱ - ۱۱ - ۱۱ - ۱۱ - ۳۵ \\
 ۱۵ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۱۱ \\
 ۱۷ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۱۳ - ۲۵ \\
 ۱۹ - ۲۰ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۰ \\
 ۲۱ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ \\
 ۲۳ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ \\
 ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ - ۲۵ \\
 ۲۹ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ \\
 ۳۱ - ۱۹ - ۱۹ - ۱۹ - ۱۹ - ۱۹ - ۱۹ - ۱۹
 \end{aligned}$$

۳۳ - ۵ پانچ اور ۶ پانچ
۳۶ - پہلے ۱۳ آنے اب ۱۲ آنے فی درجن

۳۸ - رج = ۱۳، ب ج = ۳

$$۲۰ - \frac{۵۱ \pm ۱}{۲}$$

۳۳ - ۳۱ و ۳۲ فٹ تقریباً
۳۵ - ۲ گھنٹہ

۳۷ - ۵ روپے فی کینڈ

۳۹ - ۱۲ و ۳۶

امثلہ نمبری ۱۱

۴ - ۱۷۲ - -

۵ - ۵۳، ۱۵۹۵ -

۸ - ۲۵۱۵، ۴۵۴۵ - -

۱۰ - ۱۵ - ۳۵ -

۱۲ - ۱۵۵۵، ۳۵۲۲ - -

۴ - ۱ = ۷ -

۵ - ۱۲ - ۵

۷ - ۱۵۷۹ - ۲۵۷۹ -

۹ - ۱۶۱۹ - ۲۵۴۹ -

۱۱ - ۱۴۵ - ۱۴ -

$$۱۴ - (۱) - \frac{۱}{۱۴} (۲) + \frac{۱۱}{۱۴} (۳) + \frac{۷}{۸}$$

$$۱۳ - ۱۴۵۴ - ۶۵۴۱ - ۲$$

$$۱۵ - ۸(۱) + ۷(۲) + ۶(۳)$$

$$۱۶ - ۸ = ۷(۱) + ۸ = ۶، ۷ = ۵، ۸ = ۴$$

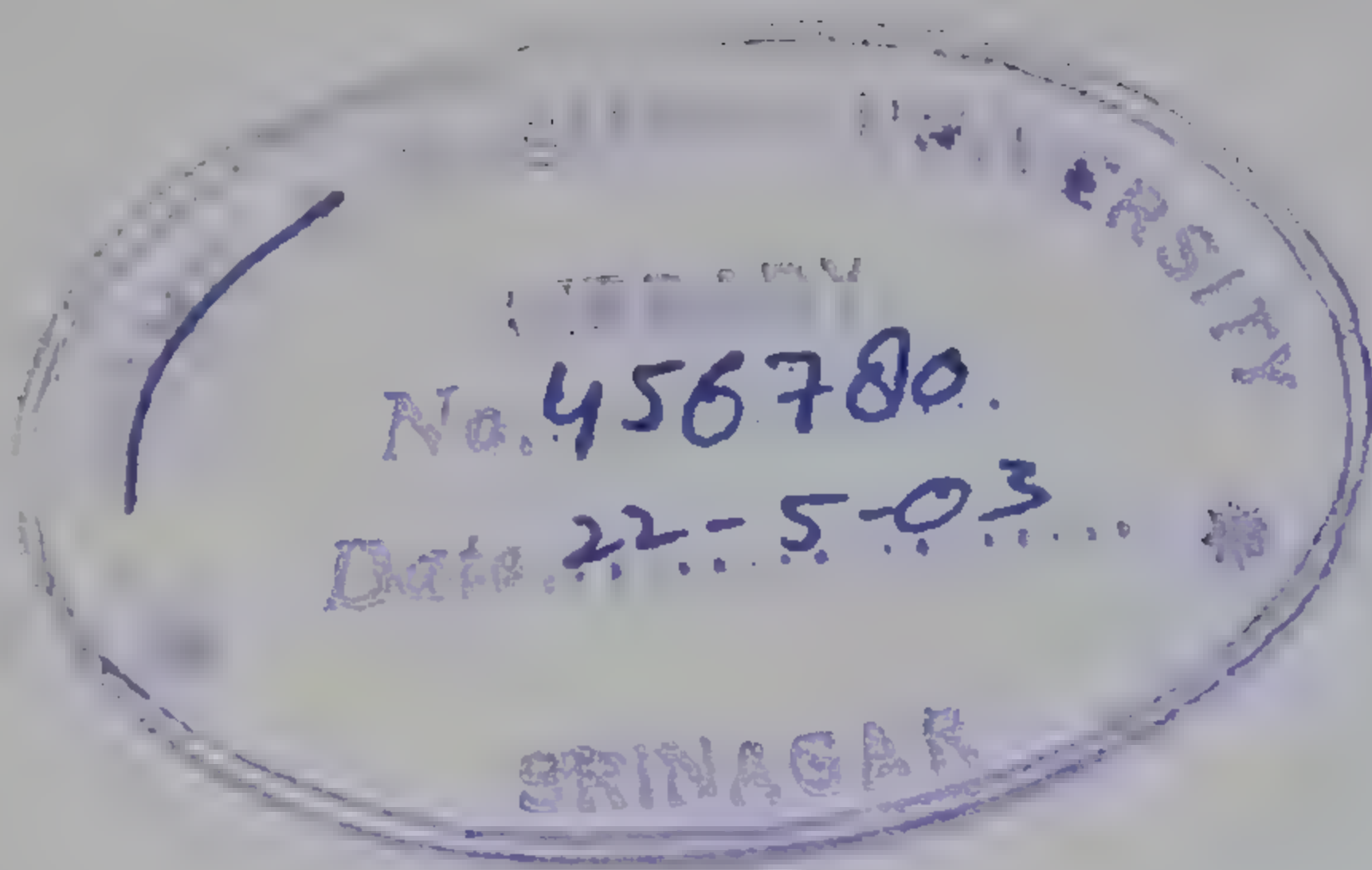
$$(۴) ۵۲۲۲ - ۲۵۹۵ - اور ۱۵۸۶$$

$$(۳) ۱۵۸۶ - ۵۴ -$$

فہرست اصطلاحات

Abscissa	فصل
Absolute term	رقم مطلق
Broken (graph)	ٹکڑے در ٹکڑے
Continuous (graph)	سلسلے در ٹکڑے
Co-ordinate	محدد
Dependent (variable)	تابع (متغیر)
Function	تفاعل
Graph	ترسیم
Independent (variable)	مستقل (متغیر)
Linear	خطی
Ordinate	معیّن
Plotting	نشان دہی کرنا، منقسم کرنا
Quadratic equation	مساوات درجہ دوم
Ready reckoner	مافہ شمار
Reduction graphs	تحویلی ترسیمیں
Variable	متغیر
Vector	سمتی

Handwritten notes in Urdu script, including the word "مکتبہ" (Maktaba).



Handwritten notes in Urdu script, including the word "مکتبہ" (Maktaba).



**ALLAMA
IQBAL LIBRARY**

**UNIVERSITY OF KASHMIR
HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN**